Ueber eine zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen und ihr Analogon im Raume.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der hohen

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Otto Wiesing.

Dienstag, den 11. September 1906, Mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina:

Vortrag

„Ueber die Kreisteilung"

und

Promotion.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1906.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität zu Breslau.

Referent: Prof. Dr. **R. Sturm.**

Termin der mündlichen Prüfung: 20. Juli 1906.

Herrn Geheimrat Sturm

als ein Zeichen der Dankbarkeit.

Um die Mitte der sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts wurden zwei interessante involutorische Punktverwandtschaften zum erstenmal genauer untersucht:

1. Die quadratische Inversion in der Ebene von T. A. Hirst (On the quadric inversion of plane curves, Proceedings of the Royal Society, Vol. XIV, S. 91, London 1865, auch Annali matematica, Serie I, t. VII, S. 49). Diese Verwandtschaft stellt eine Beziehung dar zwischen den Punkten einer und derselben Ebene, in welcher solche zwei Punkte einander entsprechen, die inbezug auf einen gegebenen Kegelschnitt konjugiert sind und mit einem festen Punkte in gerader Linie liegen.

2. Die Verwandtschaft zwischen dem 7. und 8. assoziierten Punkte, wenn ein Flächengebüsch zweiten Grades mit sechs festen Grundpunkten zugrunde gelegt wird, von C. F. Geiser (Ueber zwei geometrische Probleme, 1866, Crelles Journal Band 67, S. 78 ff.) und ausführlicher von R. Sturm (Das Problem der Projektivität etc., 1869, Math. Ann. Bd. I, S. 554 ff.). Man vergleiche auch V. Eberhard, Ueber eine räumliche involutorische Verwandtschaft 7. Grades und ihre Kernfläche 4. Ordnung, Dissertation, Breslau 1885.

Sind nun die Verhältnisse bei der Verwandtschaft in der Ebene oder im Raume klargelegt, so liegt es nahe, zwischen zwei verschiedenen Ebenen oder zwei anschaulich getrennten Räumen, in deren jeder bezw. jedem eine Verwandtschaft der bezeichneten Art definiert ist, eine Beziehung herzustellen, um aus ihr weitere Schlüsse zu ziehen. Hierdurch ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit, wenigstens im allgemeinen charakterisiert, wenn auch die Stellung der Aufgabe von

anderer Seite her einsetzt, sodass die zu behandelnden Probleme in gewissem Sinne als Erweiterungen der gewöhnlichen ebenen bezw. räumlichen Kollineation sich darstellen.

A. Die zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen.

§ 1. Definition der Verwandtschaft.

1. In zwei beliebig gelegenen Ebenen Σ, Σ' seien zwei Kegelschnittnetze mit je zwei festen Grundpunkten gegeben: N mit Q, R in Σ, N′ mit T′, U′ in Σ', und zwischen ihnen eine beliebige Kollineation hergestellt. Jedem Kegelschnitte K des Netzes N entspricht dann eindeutig ein Kegelschnitt K′ des Netzes N′, und umgekehrt. Entsprechende Kegelschnitte bewegen sich gleichzeitig linear d. h. beschreiben gleichzeitig Büschel. Jedem Büschel B aus N entspricht somit eindeutig ein Büschel B′ aus N′, und umgekehrt.

Wegen der völlig willkürlichen Wahl der Kollineation zwischen den Netzen werden den ∞^1 in N bezw. N′ enthaltenen Geradenpaaren nicht die Geradenpaare von N′ bzw. N korrespondieren, sondern im allgemeinen beliebige andere, nicht zerfallende Kegelschnitte.

Ein beliebiger Punkt X in Σ scheidet aus N einen Büschel B aus, der ausser X und den festen Grundpunkten Q, R noch einen zweiten veränderlichen Grundpunkt $\overline{X}$ besitzt. Der Büschel B′ von N′, welcher diesem Büschel B vermöge der Kollineation entspricht, hat ausser den festen Grundpunkten T′, U′ noch zwei bewegliche Grundpunkte; diese ordnen wir als X′, $\overline{X}'$ dem Punktepaare X, $\overline{X}$ als entsprechend zu. Umgekehrt entspricht dann dem Punktepaare X′, $\overline{X}'$ eindeutig das Paar X, $\overline{X}$, weil die Büschel B, B′ sich ein-eindeutig entsprechen. Hiermit hat sich zwischen den Punkten der Felder Σ, Σ' eine zwei-zweideutige Verwandtschaft ergeben, und diese soll den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

2. Wie am Ende der Einleitung erwähnt, lässt sich die konstruierte Verwandtschaft als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kollineation zweier ebenen Felder auffassen. Denn während man letztere dadurch herstellen kann, dass man zwei Geradenfelder kollinear aufeinander bezieht und die Grundpunkte entsprechender Büschel einander als entsprechend zuordnet, werden hier zwei spezielle Kegelschnittnetze durch eine Kollineation verwandt gemacht und die veränderlichen Grundpunktepaare entsprechender Büschel als einander entsprechend definiert.

Es ist hervorzuheben, dass unsere Verwandtschaft, die wir fortan mit $\mathfrak{T}_{2,2}$ bezeichnen wollen, Spezialfall einer allgemeineren zwei-zweideutigen Verwandtschaft ist. Denn im allgemeinen wird es nicht notwendig sein, dass zwei Punkte des einen Feldes, etwa X', $\overline{X}'$ von Σ', die einem Punkte X des anderen Feldes Σ entsprechen, auch demselben Punkte $\overline{X}$ von Σ korrespondieren; vielmehr wird, wenn man zu X' und $\overline{X}'$ je den zweiten entsprechenden Punkt ausser X in Σ konstruiert, der Fall eintreten, dass diese beiden Punkte nicht, wie bei uns, identisch, sondern voneinander verschieden sind. Eine Verwandtschaft von diesem allgemeineren Charakter erhält man beispielsweise, wenn man ausser zwei Feldern noch eine Strahlenkongruenz zweiter Ordnung und beliebiger Klasse giebt und jedem Punkte jedes Feldes diejenigen beiden Punkte des anderen Feldes als entsprechend zuordnet, in denen die aus jenem Punkte an die Kongruenz gehenden beiden Strahlen die andere Ebene treffen.

Fragen wir noch, auf wieviel Weisen wir unsere Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ herstellen können, wenn die Ebenen Σ, Σ' gegeben sind. Jeden der Punkte Q, R in Σ, ebenso T', U' in Σ' kann man auf ∞^2 Weisen wählen, die Netze N, N' aus den durch Q, R bezw. T', U' bestimmten Kegelschnittgebüschen je auf ∞^3, also die ganze Figur in jeder der Ebenen Σ, Σ' auf ∞^7 Weisen. Die Anzahl der möglichen Kombinationen der Figuren in Σ und Σ' zu je zweien ist ∞^{14}. Da man endlich noch unter ∞^8 Kollineationen be-

liebig wählen kann, so ergiebt sich als Mannigfaltigkeit unserer Verwandtschaft: ∞^{22}.

§ 2. Die verbundenen Verwandtschaften.

3. Wird ein Punkt X in Σ gegeben, so hat dies (§ 1,1) zwei wesentlich verschiedene Konsequenzen: einmal wird hierdurch ein Punkt $\bar{X}$ in demselben Felde Σ eindeutig bestimmt, nämlich derjenige Punkt, der mit X zusammen das veränderliche Grundpunktepaar des durch X festgelegten Büschels aus N bildet; sodann wird in Σ' eindeutig das Punktepaar X', $\bar{X}'$ festgelegt. Im Felde Σ entsteht also eine Verwandtschaft zwischen Punkten X und $\bar{X}$, die, wie leicht zu sehen ist, nicht nur ein-eindeutig, sondern auch involutorisch ist. Zwei in dieser involutorischen Verwandtschaft einander zugeordnete Punkte X, $\bar{X}$ mögen *verbundene* Punkte genannt werden, und die Verwandtschaft selbst die unserer zwei-zweideutigen Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ verbundene Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ in Σ. Eine ganz gleichartige verbundene Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_{1,1}$ besteht im Felde Σ' zwischen den Punkten X' und $\bar{X}'$.

Welcher Art sind nun diese verbundenen Verwandtschaften?

Von den Geradenpaaren des Netzes N in Σ muss jedes die Punkte Q, R enthalten; also wird es Geradenpaare geben, die durch jeden dieser Punkte je eine Gerade senden, und solche, von denen eine Gerade beide Punkte zugleich enthält. Wir unterscheiden diese Systeme von je ∞^1 Geradenpaaren als Geradenpaare I. und II. Art. Die Strahlenbüschel um Q und R sind projektiv; zugeordnet sind zwei Strahlen, die zu demselben Geradenpaare I. Art gehören. Ihr Erzeugnis ist ein Kegelschnitt Ω, der durch Q und R geht und nach Definition der Projectivität Ort der Doppelpunkte aller Geradenpaare I. Art ist. Mit ihm zusammen bildet die Gerade $Q\,R = o$, welche die Doppelpunkte sämtlicher Geradenpaare II. Art enthält, die Jacobische Curve dritter Ordnung des Netzes N. Aus der Erzeugung von Ω geht hervor, dass o

mit jeder der Tangenten q in Q, r in R an Ω ein Geradenpaar I. Art bildet; (o, q) und (o, r) sind aber zugleich Geradenpaare II. Art, da ihr Bestandteil o die beiden festen Punkte Q, R enthält. Bekanntlich ist Ω, und ebenso o Träger einer Involution von Punktepaaren Y, Z, die inbezug auf alle Kegelschnitte von N konjugiert sind. Doppelpunkte beider Involutionen sind Q und R, Involutionscentrum der auf Ω befindlichen Involution ist Punkt (q, r) = O d. i. der Pol von o inbezug auf Ω (Steiner-Schroeter, Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Teil, 3. Aufl. 1898, Nr. 351). Eine Gerade Y Z trifft jeden Kegelschnitt des Netzes N in einem Punktepaare, das zu Y, Z harmonisch liegt; Y Z begegnet aber jedem Geradenpaare II. Art einmal in einem Punkte $\overline{O}$ auf o, folglich müssen die veränderlichen Geraden dieser Geradenpaare durch den vierten harmonischen Punkt zu $\overline{O}$ inbezug auf Y und Z auf der Gerade Y Z gehen; dieser ist aber für alle Punkte $\overline{O}$ von o der Punkt O als Pol von o bezüglich Ω. Da ferner jeder Punkt von o Doppelpunkt eines Geradenpaares II. Art ist, so gehört jeder Strahl aus O nach einem Punkte von o, mithin jeder Strahl des Büschels um O einem Geradenpaare II. Art an: die Geradenpaare II. Art bilden einen Büschel im Netze N; dies ist der Büschel, den unser Netz N und dasjenige Netz des durch Q und R bestimmten Kegelschnittsgebüsches, das von sämtlichen Geraden der Ebene Σ und der Gerade Q R = o gebildet wird, als Netze desselben Gebüsches gemeinsam haben müssen. — Ein beliebiger Punkt X von Σ scheidet aus N einen Büschel aus, der ein und nur ein Geradenpaar II. Art enthält: (o, X O), folglich muss der zweite veränderliche Grundpunkt dieses Büschels, der dem X verbundene $\overline{X}$ auf X O liegen. Wir haben für Feld Σ:

Verbundene Punkte liegen mit O in gerader Linie.

Die Schnittpunkte Y, Z des O-Strahles X O mit Ω sind inbezug auf alle Kegelschnitte des Netzes N, also auch inbezug auf diejenigen unseres Büschels konjugiert, liegen also zu X, $\overline{X}$ harmonisch.

Verbundene Punkte $X, \bar{X}$ *in* Σ *sind inbezug auf* Ω *konjugiert.*

Hiermit ist gezeigt, dass die verbundene Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ *in* Σ *eine quadratische Inversion ist, mit* Ω *als Basis und O als Centrum.*

Eine Verwandtschaft derselben Art ist natürlich $\mathfrak{T}'_{1,1}$ in Σ', mit der Basis Φ' und dem Centrum V', dem Pole von T' U' $=$ v' inbezug auf Φ'.

Bezeichnen wir noch die Tangenten in T', U' an Φ' mit t', u', so haben die Hauptdreiecke der Inversionen $\mathfrak{T}_{1,1}$ bezw. $\mathfrak{T}'_{1,1}$ die Ecken Q, R, O bezw. T', U', V' mit den Gegenseiten r, q, o bezw. u', t', v'. N und N' sind die Netze von Kegelschnitten, welche in diesen Inversionen als ganze Curven sich selbst verbunden sind. Zwei beliebige Paare verbundener Punkte liegen also stets auf einem Kegelschnitte des Netzes. Ort der Coincidenzpunkte $X \equiv \bar{X}$ bezw. $X' \equiv \bar{X}'$ sind die Basiskegelschnitte Ω bezw. Φ'. Jeder Büschel des Netzes N, durch X oder $\bar{X}$ ausgeschieden, besitzt drei Geradenpaare; von diesen sind zwei I. Art, eines II. Art; letzteres ist (o, O X), die beiden erstgenannten sind (X R, $\bar{X}$ Q) und (X Q, $\bar{X}$ R.)

§ 3. Allgemeine Eigenschaften der $\mathfrak{T}_{2,2}$.

4. Beschreibt ein Punkt das eine der beiden Felder Σ, Σ', so wird das andere Feld von dem entsprechenden Punktepaare doppelt durchlaufen; kommt doch jedes Punktepaar, etwa X', $\bar{X}'$ von Σ', jedesmal zustande, wenn der die Ebene Σ durchwandernde Punkt in einen der Punkte des entsprechenden Paares X, $\bar{X}$ fällt. Jedes der beiden Felder wird doppelt überdeckt.

Sind zwei Punkte des einen Feldes, etwa X_1, X_2 von Σ, einander unendlich benachbart, was durch $X_1 \backsim X_2$ bezeichnet werde, so erfordert das Prinzip der Stetigkeit, dass auch ihre verbundenen Punkte $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ und ebenso ihre entsprechenden Paare verbundener Punkte X'_1, $\bar{X}'_1$ und X'_2, $\bar{X}'_2$ es sind: $\bar{X}_1 \backsim \bar{X}_2$ und etwa $X'_1 \backsim X'_2$, $\bar{X}'_2 \backsim \bar{X}'_1$.

Durchläuft ein Punkt in einem der beiden Felder eine beliebige Curve, so beschreibt das entsprechende Punktepaar die entsprechende Curve, erzeugt also auf dieser eine „Involution“ verbundener Punkte, welche der im ersten Felde beschriebenen geraden oder krummen Punktreihe so entspricht, dass jedem Punkte der letztgenannten Punktreihe ein Punktepaar der entsprechenden „Involution“ eindeutig zugeordnet ist. Dabei ist unter „Involution“ eventuell auch eine ein-eindeutige involutorische Punktkorrespondenz auf nicht universalem Träger zu verstehen, für die also nicht mehr das Chaslessche Korrespondenzprinzip gilt.

Umgekehrt entspricht der genannten Curve des zweiten Feldes im ersten nicht allein die gegebene Curve, sondern auch noch deren verbundene Curve, und der Involution verbundener Punkte auf ihr korrespondiert wieder eine solche Involution; diese zerfällt aber, entsprechend den beiden einander verbundenen Bestandteilen der entsprechenden Curve, in zwei ein-eindeutig aufeinander bezogene Punktreihen.

5. Alle Curven eines Feldes, welche vermöge $\mathfrak{T}_{2,2}$ Curven des anderen Feldes entsprechen, sind in der $\mathfrak{T}_{1,1}$ ihres Feldes als ganze Curven sich selbst verbunden. Alle diese Curven, also auch speziell alle beliebigen Curven des Feldes nebst ihren verbundenen, tragen Involutionen verbundener Punkte, welche sämtlich in dem Centrum der Inversion ihres Feldes ein gemeinsames Involutionscentrum besitzen. Dieses liegt, wie die spätere Untersuchung zeigen wird, bei manchen Curven auf ihnen selbst, bei den meisten aber ausserhalb derselben. Die Doppelpunkte dieser Involutionen ergeben sich bei allen genannten Curven als ihre veränderlichen Schnittpunkte mit der Coincidenzcurve ihres Feldes. Weil auch zwei vereinigte verbundene Punkte immer noch eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade besitzen, nämlich den Strahl aus O (V′) nach dem Coincidenzpunkte, so berühren bei den sich selbst verbundenen Curven in den Coincidenzpunkten Tangenten aus dem Involutionscentrum; bei Curven dagegen, die aus zwei einander verbundenen Curven bestehen, sind die Strahlen aus O (V′) nach den Coincidenzen

Geraden durch Doppelpunkte der Gesamtcurve, nicht mehr Tangenten.

Enthält eine Curve eines Feldes ein oder mehrere Paare verbundener Punkte, so kommen die entsprechenden Punktepaare, jedem einzelnen Punkte jedes Paares entsprechend, auf der korrespondierenden Curve im anderen Felde doppelt zustande, werden also Paare verbundener Doppelpunkte der entsprechenden Curve.

Umgekehrt, besitzt die letztgenannte Curve Doppelpunkte, und zwar veränderliche, ausserhalb etwaiger Hauptpunkte, so müssen diese paarweise auftreten, wobei jedes Paar ein Paar verbundener Doppelpunkte ist; diese Paare verbundener Doppelpunkte entsprechen dann entweder einem Paare verbundener Punkte auf der gegebenen Curve oder einem veränderlichen Doppelpunkte derselben. Auszunehmen ist aber der Fall, wenn ein Doppelpunkt, wie etwa bei einem Geradenpaare I. Art, dadurch entsteht, dass zwei einander verbundene Bestandteile der Curve sich auf der Coincidenzcurve ihres Feldes schneiden; Doppelpunkte dieser Art ziehen keine zweiten nach sich.

Eine beliebige Gerade eines Feldes enthält, weil sie nicht durch O (V′) geht, kein Paar verbundener Punkte, geschweige denn einen Doppelpunkt, folglich befindet sich auf ihrer entsprechenden Curve im allgemeinen kein veränderlicher Doppelpunkt.

Eine beliebige Curve C^m in Σ besitzt im allgemeinen eine endliche Anzahl von Paaren verbundener Punkte. Unter den $2\,m^2$ Schnittpunkten von C^m mit ihrer verbundenen Curve der Ordnung $2m$ müssen sich die $2m$ Schnittpunkte von C^m mit Ω befinden, welche sich selbst verbunden sind. C^m und ihre verbundene Curve haben also noch $2m\,(m-1)$ gemeinsame Punkte; diese müssen in $m\,(m-1)$ Paare verbundener Punkte zerfallen, da zu jedem Schnittpunkte von C^m und C^{2m} als Punkt von C^m resp. C^{2m} der verbundene Punkt auf C^{2m} resp. C^m liegen, also wieder Schnittpunkt beider Curven sein muss, da die Coincidenzpunkte schon erschöpft sind. Eine beliebige Curve m. Ordnung in Σ enthält

also m (m—1) veränderliche Paare verbundener Punkte, mithin ihre entsprechende Curve der Ordnung 4m in Σ' m (m—1) Paare verbundener veränderlicher Doppelpunkte.

Besteht eine Curve eines Feldes nur aus Punkten, deren verbundene Punkte wieder auf der Curve liegen, ist also die Curve als ganze sich selbst verbunden, so entspricht ihr im anderen Felde eine Curve, von der jeder Punkt doppelt zustande kommt, wenn ein Punkt die gegebene Curve beschreibt. Die entsprechende Curve ist also doppelt zu zählen.

6. Alle bisherigen Ergebnisse weisen auf die wichtigste allgemeine Eigenschaft unserer Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ hin, dass sie inbezug auf die Felder Σ, Σ' völlig gleichartig ist. Dies liess schon ihre Herstellung, bei welcher beide Felder gleichmässig berücksichtigt wurden, erwarten. Alle Ergebnisse, die wir für das eine Feld erhalten, gelten ganz entsprechend auch für das jeweilige andere Feld.

Die wichtigste Folge dieser Symmetrie ist, dass $\mathfrak{T}_{2,2}$ nur eine Gradzahl besitzt d. h. dass die Curven jedes Feldes, die den Geraden des anderen entsprechen, beidemal von gleicher Ordnung sind, mag man von dem einen oder von dem anderen Felde ausgehen. In der Tat: einer Gerade g von Σ entspreche eine Curve n-ter Ordnung C′ in Σ'. Eine beliebige Gerade l′ von Σ' schneidet C′ in n Punkten X′, unter denen sich keine zwei verbundenen befinden; die entsprechenden n Paare verbundener Punkte liegen einmal auf der l′ entsprechenden Curve C, sodann auf der unserer Curve C′ entsprechenden Curve, das ist Gerade g und ihr verbundener Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Da g beliebig, nicht durch O gehend gewählt ist, enthält es kein Paar verbundener Punkte; die erwähnten n Punktepaare müssen sich also auf g und $\mathfrak{K}$ so verteilen, dass n Punkte auf g, ihre n verbundenen Punkte auf $\mathfrak{K}$ fallen. C begegnet der beliebigen Gerade g von Σ in n Punkten, ist also n-ter Ordnung wie C′. Wir wären zu demselben Ergebnisse gelangt, wenn wir vom Felde Σ' unseren Ausgang genommen hätten. Diese gemeinsame Ordnung n der Curven C und C′ nennen wir den Grad n der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$.

Eine beliebige Curve m-ter Ordnung C^m in Σ begegnet einer beliebigen C in mn Punkten, unter denen im allgemeinen keine zwei einander verbunden sind. Die entsprechenden mn Paare verbundener Punkte gehören der jener C^m korrespondierenden Curve an, die mn einen Punkte dieser Paare ferner der Gerade l', welche der Curve C entpricht, die mn verbundenen Punkte dem der l' verbundenen Kegelschnitte. Die der Curve C^m entsprechende Curve begegnet der beliebigen Gerade l' von Σ' in mn Punkten, ist also von der Ordnung mn.

Die einer beliebigen Gerade eines Feldes entsprechende Curve enthält, wie gezeigt wurde, im allgemeinen keine veränderlichen Doppelpunkte. Ferner folgt aus der Symmetrie der $\mathfrak{T}_{2,2}$, und es wird sich später bestätigen, dass in beiden Feldern gleichartige Systeme singulärer Punkte existieren und dass sich diese zu den Systemen der Curven C und C' gleichartig verhalten werden. Die Curven C und C' werden also im allgemeinen dieselbe Anzahl gleichartiger fester Doppelpunkte besitzen, mithin von gleichem Geschlechte sein. Diese Geschlechtszahl p nennen wir das Geschlecht p der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$. Ergebnis ist:

Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ besitzt nur eine Gradzahl n und eine Geschlechtszahl p.

Gehen wir zur Bestimmung dieser Zahlen über.

§ 4. Grad und Geschlecht.

7. Zunächst finde noch eine Folgerung aus dem Vorangehenden Platz. In § 2,3 ergab sich, dass die Geradenpaare II. Art in jedem der Netze N, N' einen Büschel bilden, aus dem Netze ausgeschieden durch Punkt O bezw. V', während der zweite veränderliche Grundpunkt, zu O bezw. V' verbunden, jeder Punkt der Gerade o bezw. v' ist. Nach § 1 entsprechen diesen Büscheln von Geradenpaaren allgemeine Kegelschnittbüschel, mit je zwei veränderlichen Grundpunkten, die wir als dem Punkte O und jedem Punkte von o bezw. dem Punkte V' und jedem Punkte von v' entsprechend an-

zusehen und daher als O', $\overline{O}'$ bezw. V, $\overline{V}$ zu bezeichnen haben. Umgekehrt korrespondieren jedem dieser Punkte O', $\overline{O}'$ bezw. V, $\overline{V}$ Punkt O und die ganze Gerade o bezw. V′ und v′. Hiermit sind O', $\overline{O}'$, V, $\overline{V}$ als einfache Hauptpunkte von $\mathfrak{T}_{2,2}$ erkannt. Da eine beliebige Curve m. Ordnung der Gerade o (v′) in m veränderlichen Punkten, ausserhalb der beiden beiden Netzgrundpunkte, begegnet, so muss ihre entsprechende Curve m-mal durch jeden der Punkte O', $\overline{O}'$ (V, $\overline{V}$) gehen; insbesondere *muss die einer Gerade von* Σ (Σ') *entsprechende Curve in* Σ' (Σ) *durch* O' *und* $\overline{O}'$ (*V und* $\overline{V}$) *je einfach laufen.*

Nunmehr legen wir in das Feld Σ eine beliebige Gerade g und fragen nach Ordnung und Geschlecht der ihr in Σ' entsprechenden Curve C′. Wir erzeugen g durch in Korrespondenz gesetzte Gebilde von Σ, deren entsprechende Gebilde in Σ' bekannt sind. Zu dem Zwecke greifen wir aus dem Netze N zwei beliebige Büschel B_1, B_2 heraus, etwa mit den veränderlichen Grundpunkten G_1, $\overline{G}_1$ und G_2, $\overline{G}_2$, und nennen solche Kegelschnitte beider Büschel entsprechend, die sich auf g schneiden. Da jeder Kegelschnitt eines dieser Büschel g zweimal trifft und jeder der beiden Schnittpunkte aus dem anderen Büschel einen Kegelschnitt ausscheidet, so ist durch unsere Zuordnung zwischen den Büscheln eine zwei-zweideutige Korrespondenz hergestellt. In dieser giebt es ein sich selbst entsprechendes Element; das ist der Kegelschnitt, in dem sich B_1 und B_2 als Büschel desselben Netzes N schneiden müssen; er enthält ausser Q und R die Punkte G_1, $\overline{G}_1$, G_2, $\overline{G}_2$. Jedesmal, wenn ein die Gerade g durchwandernder Punkt in einen der beiden Schnittpunkte dieses Kegelschnitts fällt, verbreitet sich der zweite veränderliche Schnittpunkt, der verbundene Punkt, den sonst zwei entsprechende Kegelschnitte noch haben, über den ganzen Kegelschnitt aus; dieser sich selbst entsprechende Kegelschnitt kommt zweimal zum Gesamterzeugnisse.

In eine beliebige Gerade l der Ebene Σ wird durch die Büschel eine Punktkorrespondenz [4,4] eingeschnitten; nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip besitzt sie acht

Coincidenzen, Punkte, in denen sich zwei entsprechende Kegelschnitte auf l begegnen: das Gesamterzeugnis der Büschel B_1, B_2 ist eine Curve achter Ordnung. In eine beliebige Gerade durch einen der Punkte Q, R wird ausserhalb Q bezw. R eine Punktkorrespondenz [2,2] eingeschnitten, deren vier Coincidenzen die sämtlichen Schnitte der Curve mit der Gerade ausserhalb Q bezw. R darstellen; folglich haben sich in Q bezw. R vier Schnittpunkte vereinigt, diese Punkte liegen auf dem Erzeugnisse vierfach. Aehnlich ergiebt sich, dass G_1, $\overline{G}_1$, G_2, $\overline{G}_2$ je doppelt auf der Kurve achter Ordnung liegen. Lösen wir jetzt den sich selbst entsprechenden Kegelschnitt zweimal ab, so bleibt eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in Q und R übrig, welche nicht mehr durch G_1, $\overline{G}_1$, G_2, $\overline{G}_2$ geht. Der Schnittpunkt von g mit o ordnet die Geradenpaare (o, G_1 $\overline{G}_1$) und (o, G_2 $\overline{G}_2$) einander zu; deren Schnitt besteht aus O und der ganzen Gerade o, mithin gehört o dem Erzeugnisse, und zwar einfach an. Sehen wir auch von dieser Gerade ab, so bleibt eine Curve dritter Ordnung mit einfachen Punkten in Q, R, O. Sie besteht aus der Gerade g und ihrem verbundenen Kegelschnitte; denn zwei Kegelschnitte aus B_1 und B_2, die sich auf g schneiden, haben noch einen zweiten veränderlichen Schnittpunkt, der, wenn der erste die Gerade g beschreibt, den der g verbundenen Kegelschnitt durchläuft. Als für uns allein brauchbares Erzeugnis der Büschel B_1, B_2 verbleibt die Gerade g und ihr verbundener Kegelschnitt.

Transformieren wir jetzt die verwandten Büschel B_1, B_2 mittels der Collineation zwischen den Netzen N, N′ in das Feld Σ′, so erhalten wir die entsprechenden Büschel B_1', B_2' mit den Paaren veränderlicher Grundpunkte G_1', $\overline{G}'_1$ und G'_2, $\overline{G}'_2$; sie sind ebenfalls zwei-zweideutig aufeinander bezogen und besitzen in ihrem gemeinsamen Kegelschnitte ein sich selbst entsprechendes Element. Dieser löst sich von dem gesamten Erzeugnisse achter Ordnung der Büschel B'_1, B'_2 doppelt ab, weil sein entsprechender Kegelschnitt, der gemeinsame von B_1 und B_2, es tut. Da-

gegen wird die Reduktion des Erzeugnisses, die in Σ durch die einander entsprechenden Geradenpaare II. Art bewirkt wurde, jetzt nicht stattfinden, da diesen Geradenpaaren nach § 1 zwei allgemeine Kegelschnitte in Σ' korrespondieren. Als eigentliches Erzeugnis der Büschel B'_1, B'_2 erhalten wir also eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in T', U'. Sie wird, wenn ein Punkt in Σ die Gerade g und sein verbundener Punkt den zu g verbundenen Kegelschnitt beschreibt, von dem entsprechenden Punktepaare durchlaufen, ist also die der Gerade g und ihrem verbundenen Kegelschnitte entsprechende Curve. Wir haben den Satz:

Der Grad von $\mathfrak{T}_{2,2}$ *ist* $n = 4$.

8. Nach dem im Eingange dieses § Gesagten enthält, wie auch aus dem unmittelbar Vorangehenden folgt, die der Gerade g entsprechende Curve C' die Punkte O', $\overline{O'}$ je einfach; dagegen kann sich V' nicht auf C' befinden, weil g weder durch V noch durch $\overline{V}$ geht. Folglich kann C' die Gerade v' nicht in veränderlichen Punkten d. h. ausserhalb T', U' schneiden; nimmt man die gleichartige Definition der Punkte T', U' zuhilfe, so könnte man auch hieraus schliessen, dass diese Punkte Doppelpunkte von C' sind.

Um zu entscheiden, ob wir bereits alle festen Punkte der Curven C' erhalten haben, zählen wir die gemeinsamen Punkte zweier beliebigen Curven C' ab. Geben wir uns in Σ zwei beliebige Geraden g_1, g_2 nebst ihren verbundenen Kegelschnitten $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, so haben g_1 und $\mathfrak{K}_1$ mit g_2 und $\mathfrak{K}_2$ zusammen neun gemeinsame Punkte. Von diesen fallen drei in die festen Punkte Q, R, O; die übrigen sechs veränderlichen Schnittpunkte zerfallen in drei Paare verbundener Punkte: eines besteht aus dem Punkte (g_1, g_2) und dem einzigen veränderlichen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$; und den Punkten $(g_1, \mathfrak{K}_2)$ sind verbunden die Punkte $(\mathfrak{K}_1, g_2)$. Diesen drei Paaren verbundener, veränderlicher Schnittpunkte entsprechen ebensoviel Paare verbundener, veränderlicher Schnittpunkte der Curven C'_1, C'_2, also im ganzen sechs veränderliche Schnittpunkte. Unter den bekannten festen Punkten beider Curven zählen die Doppelpunkte T', U' für je vier,

zusammen für acht, die einfachen Punkte O', $\overline{O}'$ für zwei einfache gemeinsame Punkte. Mit diesen sechs veränderlichen und zehn durch die festen Punkte repräsentierten Schnittpunkten ist die Gesamtzahl 16 der Punkte, die C'_1, C'_2 als Curven vierter Ordnung gemeinsam haben können, erschöpft. Die vier Punkte T', U', O', $\overline{O}'$ sind also die einzigen festen Punkte, durch welche alle Curven C' gehen. Da ferner, wie wir wissen und aus der Erzeugung der C' bestätigen können, die Curven C' keine veränderlichen Doppelpunkte enthalten, so sind T', U' ihre beiden einzigen Doppelpunkte; als Geschlecht dieser Curven ergiebt sich $p = \frac{1}{2}(4-1)\cdot(4-2) - 2 = 1$. Wir haben:

Das Geschlecht der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ *ist* $p = 1$.

Fassen wir endlich noch zusammen, was wir bisher für die Curven C' und damit natürlich auch für die Curven C ermittelt haben, so können wir den Satz aussprechen:

Den Geraden jedes Feldes entsprechen vermöge $\mathfrak{T}_{2,2}$ *im anderen Felde Curven vierter Ordnung vom Geschlechte* **1**, *welche in den beiden Netzgrundpunkten dieses Feldes Doppelpunkte besitzen und durch die dem Centrum der* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *des anderen Feldes entsprechenden zwei verbundenen Punkte einfach laufen. Aus der Ordnung* $n=4$, *der Anzahl der Doppelpunkte* $d=2$, *derjenigen der Rückkehrpunkte* $s=0$ *ergiebt sich mittels der Plückerschen Formeln die Klasse* $k=8$, *die Anzahl der Doppeltangenten* $t=8$ *und die Zahl der Wendepunkte* $w=12$.

§ 5. Die Hauptelemente.

9. Als einfache Hauptpunkte von $\mathfrak{T}_{2,2}$ haben wir schon die Punkte V, $\overline{V}$ in Σ und O', $\overline{O}'$ in Σ' erkannt; die entsprechenden Hauptgeraden sind v' und o. Ferner lässt sich aus dem, was in § 1 über die Geradenpaare gesagt ist, entnehmen, dass den Geradenpaaren (o,q) und (o,r) allgemeine Kegelschnitte q_2' und r_2' des Büschels (T', U', O', $\overline{O}'$), den Geradenpaaren (v', t') und (v', u') allgemeine Kegelschnitte t_2 und u_2 des Büschels (Q, R, V, $\overline{V}$) entsprechen. Der parabolischen

Involution verbundener Punkte auf q, r, t′ oder u′ entspricht die Involution verbundener Punkte auf dem entsprechenden Kegelschnitte; also jedem Punkte einer jener Geraden ist ein Paar verbundener Punkte auf diesem Kegelschnitte, dem Punkte Q, R, T′ oder U′ selbst jedes Paar verbundener Punkte dieser Curve entsprechend. Umgekehrt korrespondiert jedem beliebigen Punkte auf q_2' etwa ein Punktepaar auf q, also Q und ein bestimmter Punkt der Gerade q. Die festen Netzgrundpunkte Q, R, T′, U′ sind also doppelte Hauptpunkte unserer Verwandtschaft.

Geht eine beliebige Curve C^m durch einen dieser Punkte etwa k-mal, so ist jedesmal, wenn ein die Curve durchwandernder Punkt durch den Hauptpunkt läuft, der ganze Hauptkegelschnitt des anderen Feldes entsprechend; als eigentliches der Curve C^m entsprechendes Gebilde bleibt eine Curve der Ordnung $4m-2k$. Ganz analog lösen sich bei den übrigen Hauptpunkten, einfachen wie doppelten, die entsprechenden Hauptcurven ab, wenn C^m jene Punkte enthält.

Hiermit sind alle Hauptpunkte unserer $\mathfrak{T}_{2,2}$ nebst ihren entsprechenden Hauptcurven erschöpft. Denn gäbe es noch einen Hauptpunkt dieser Art, so müsste jede Gerade des anderen Feldes seiner entsprechenden Hauptcurve in veränderlichen Punkten begegnen; dies hätte zur Folge, dass der Hauptpunkt auf allen Curven C bezw. C′ seines Feldes liegen müsste; nach der Abzählnng in § 4,8 sind aber weitere gemeinsame Punkte dieser Curven ausser den bereits bekannten ausgeschlossen.

Es muss hervorgehoben werden, dass die Punkte O und V′, welche in $\mathfrak{T}_{1,1}$ bezw. $\mathfrak{T}'_{1,1}$ Hauptpunkte darstellen, für die $\mathfrak{T}_{2,2}$ nicht im eigentlichen Sinne Hauptpunkte sind. Jedenfalls aber sind sie ausgezeichnete Punkte unserer Verwandtschaft, schon weil sie zu den einfachen Hauptpunkten von $\mathfrak{T}_{2,2}$ führen. Wir werden aber bald noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften dieser Punkte kennen lernen. Zunächst resümieren wir:

Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ besitzt in jeder Ebene zwei einfache und zwei doppelte Hauptpunkte; letztere sind die festen

Grundpunkte der Netze N, N′: Q, R, T′, U′; ihre entsprechenden Kegelschnitte gehören dem Büschel (T′, U′, O′, $\overline{O'}$) bezw. (Q, R, V, $\overline{V}$) an. Einfache Hauptpunkte sind die den Inversionszentren O und V′ entsprechenden Punktepaare O′, $\overline{O'}$ und V, $\overline{V}$; ihre entsprechenden Hauptgeraden sind o und v′. Die Punkte O und V′ sind für $\mathfrak{T}_{2,2}$ nicht Hauptpunkte.

Nach § 4,7 geht die einer beliebigen Curve m. Ordnung C^m von Σ entsprechende Curve der Ordnung 4m durch O′ und $\overline{O'}$ je m-mal. Da C^m ferner jeder der Hauptcurven t_2, u_2 in 2m veränderlichen Punkten begegnet, unter denen sich im allgemeinen keine zwei verbundenen Punkte befinden, so liegen die Hauptpunkte T′,U′ anf der entsprechenden Curve 2m-fach, während V′ wiederum nicht auf diese Curve zu liegen kommt, weil sie der Gerade v′ nicht in veränderlichen Punkten begegnet, und dies, weil C^m nicht V oder $\overline{V}$ enthält.

Berührt etwa die Curve C^m die Gerade o einfach, so kommt, wenn man C^m von einem Punkte durchlaufen lässt, das entsprechende Punktepaar beim Durchwandern der entsprechenden Curve unmittelbar hintereinander zweimal in das Punktepaar O′,$\overline{O'}$; jeder dieser Punkte ist also eine Spitze der entsprechenden Curve. Ebenso werden T′, U′ Spitzen dieser Curve, wenn C^m die Hauptkegelschnitte t_2 bezw. u_2 ausserhalb der Hauptpunkte berührt; zugleich findet dann auch zwischen jener Curve und t′ bezw. u′ Berührung statt. Hat dagegen C^m mit q oder r eine einfache Berührung, so tangiert die entsprechende Curve den Kegelschnitt q'_2 resp. r'_2 doppelt, nämlich an zwei einander verbundenen Stellen, wie aus der Bemerkung über unendlich benachbarte Punkte in § 3,4 folgt.

§ 6. **Die Geradenpaare I. und II. Art.**

10. Als verbundene Punkte sind O′, $\overline{O'}$ mit V′, V,$\overline{V}$ mit O allineiert. Was entspricht der Gerade O V $\overline{V}$? Sie bildet mit o zusammen ein Geradenpaar II. Art, folglich gehört ihre entsprechende Curve dem Kegelschnittbüschel

$(T', U', O', \overline{O}')$ an; da ferner dieser Kegelschnitt den Punkt V' enthalten muss, zerfällt er in die Gerade $V' O' \overline{O}'$ und die Gerade v', durch die jene Gerade zu einem Geradenpaare von N' ergänzt wird. Der Involution verbundener Punkte auf der Gerade $O V \overline{V}$ entspricht also die Involution verbundener Punkte auf der Gerade $O' \overline{O}' V'$.

Im ganzen enthält der Büschel $(T', U', O', \overline{O}')$ drei Geradenpaare, von denen, wie in jedem Büschel des Netzes, zwei I. Art, das dritte II. Art ist. Diese sind $(T' O', U' \overline{O}')$, $(T' \overline{O}', U' O')$ und $(v', V' O' \overline{O}')$. Da der Büschel $(T', U', O', \overline{O}')$ alle Kegelschnitte umfasst, welche den sämtlichen Geradenpaaren II. Art von Σ entsprechen, so folgt umgekehrt, dass die gefundenen drei Geradenpaare die einzigen in Σ' sind, denen Geradenpaare II. Art von Σ entsprechen; folglich ist $(v', V' O' \overline{O}')$ das einzige Geradenpaar II. Art im Netze N', dem wieder ein Geradenpaar II. Art in Σ entspricht. — Umgekehrt sind alle Kegelschnitte, welche den Geradenpaaren II. Art von Σ' entsprechen, in dem Büschel $(Q, R, V, \overline{V})$ enthalten. Dieser besitzt als einziges Geradenpaar II. Art das Paar $(o, O V \overline{V})$ und ferner die zwei Geradenpaare I. Art $(Q V, R \overline{V})$ und $(Q \overline{V}, R V)$. Hieraus folgt, dass die Geradenpaare II. Art $(o, O V \overline{V})$ und $(v', V' O' \overline{O}')$ die einzigen sind, denen wieder Geradenpaare II. Art entsprechen, und zwar entsprechen sie einander. Ausserdem haben wir in jedem Felde zwei Geradenpaare I. Art kennen gelernt, denen Geradenpaare II. Art im anderen Felde entsprechen.

11. Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Geradenpaare I. Art. Das System der entsprechenden Kegelschnitte bezeichnen wir mit G_I, gleichgültig, in welchem Felde es liegt. Jeder Punkt X der Ebene scheidet zwei Geradenpaare I. Art aus; also schickt das System G_I von Σ' in jeden Büschel des Netzes N' zwei Elemente; so z. B. in den Büschel $(T', U', O', \overline{O}')$ die zwei Kegelschnitte q'_2, r'_2, in den Büschel der Geradenpaare II. Art diejenigen beiden Geradenpaare II. Art, welche den Geradenpaaren I. Art des Büschels $(Q, R, V, \overline{V})$ entsprechen. Wir kommen also hier zu den-

selben beiden Paaren von Geradenpaar I. Art und entsprechendem Geradenpaare II. Art wie oben (10). Während wir aber oben die beiden Geradenpaare I. Art als die einzigen ihrer Art ermittelten, denen Geradenpaare II. Art entsprechen, finden wir hier, dass umgekehrt auch diese Geradenpaare II. Art die einzigen ihrer Art sind, denen Geradenpaare I. Art entsprechen.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene Σ' gehen zwei Kegelschnitte des Systems G_I. Wie viele berühren eine beliebig gegebene Gerade l' von Σ'? Berührt ein Kegelschnitt K' des Systems die Gerade l' d. h. hat er mit ihr zwei unendlich benachbarte, nicht verbundene Punkte $X' \infty Y'$ gemeinsam, so liegen die entsprechenden Paare verbundener Punkte: X, $\bar{X}$ und Y, $\bar{Y}$, ebenfalls einander unendlich benachbart, auf der unserer l' entsprechenden Curve C und dem Geradenpaare I. Art, das dem Kegelschnitte K' korrespondiert. Da bei letzterem die eine Gerade der anderen verbunden ist, liegen etwa $X \infty Y$ auf der einen, $\bar{X} \infty \bar{Y}$ auf der anderen Gerade des Paares. Es kommt also darauf an, wieviel Geraden durch Q oder R eine beliebige Curve C berühren oder wieviel anderwärts berührende Tangenten aus einem Doppelpunkte an die C gehen. Diese Anzahl ist bekanntlich vier. Zu jeder der vier Tangenten aus Q an C giebt es eine ihr verbundene Tangente aus R, welche an der verbundenen Stelle berührt, mit ihr also ein Geradenpaar I. Art bildet. Diesen vier Geradenpaaren entsprechen vier Kegelschnitte des Systems G_I, welche die Gerade l' berühren.

Dass übrigens die beiden Tangentenwürfe aus den Doppelpunkten an eine Curve C gleiches Doppelverhältnis haben, geht hier ohne weiteres daraus hervor, dass je zwei Tangenten aus verschiedenen Würfen ein Geradenpaar I. Art bilden, also sich auf dem Kegelschnitte Ω schneiden.

Liegt ein einfach unendliches System von Kegelschnitten vor, von dem μ Curven durch einen gegebenen Punkt gehen, ν eine gegebene Gerade berühren, δ Curven zu Geradenpaaren und ε zu Punktepaaren degenerieren, so bestehen die Chaslesschen Formeln: $2\mu = \nu + \varepsilon$, $2\nu = \mu + \delta$. Bei unserem Systeme G_I ist $\mu = 2$, $\nu = 4$, mithin $\delta = 6$, $\varepsilon = 0$.

Dem Systeme der Geradenpaare I. Art von N (N') entspricht ein einfach unendliches System G_I *von Kegelschnitten im Netze N' (N), von dem durch einen gegebenen Punkt zwei Elemente gehen, eine gegebene Gerade vier Elemente berühren, sechs Elemente in Geradenpaare zerfallen, kein Element eine Doppelgerade ist.*

Alle diese Zahlen sind doppelt so gross wie bei einem Kegelschnittbüschel. Das System G_I verhält sich in dieser Beziehung ähnlich wie ein System von zwei Kegelschnittbüscheln. Dies tritt auch darin zutage, wie sich die sechs Geradenpaare von G_I auf die Geradenpaare I. und II. Art verteilen. Schon oben wurde gefunden, dass G_I nur zwei Geradenpaare II. Art enthält, folglich müssen die übrigen vier von der I. Art sein.

Wir entnehmen hieraus weiter, dass das System von Geradenpaaren I. Art und das System G_I desselben Feldes vier Elemente gemeinsam haben und dass diese zweimal vier Elemente in beiden Feldern einander entsprechend sind. Fassen wir unsere Ergebnisse über Paare entsprechender Geradenpaare zusammen:

Es giebt in jedem der beiden Netze N, N' neun Geradenpaare, welchen wieder Geradenpaare entsprechen, und zwar:

vier Geradenpaare I. Art, denen wieder Geradenpaare I. Art entsprechen; die vier Paare des einen Netzes sind denen des anderen Netzes entsprechend;

zwei Geradenpaare I. Art, denen Geradenpaare II. Art korrespondieren; sie werden durch O bezw. V' ausgeschieden;

zwei Geradenpaare II. Art, denen Geradenpaare I. Art entsprechen;

ein Geradenpaar II. Art, dem wieder ein Geradenpaar II. Art entspricht; das des einen Netzes ist dem des anderen Netzes entsprechend; diese Geradenpaare sind $(o, O\ V\ \bar{V})$ *und* $(v', O'\ \bar{O}'\ V'.)$

Auf die zuerst genannten zweimal vier Geradenpaare kommen wir weiter unten noch zurück.

12. Wir bemerkten die Aehnlichkeit des Systems G_I mit einem Systeme von zwei Kegelschnittbüscheln des Netzes. Eine Analogie zeigt sich auch darin, dass das System G_I

ähnlich wie zwei beliebige Büschel des Netzes zu einer Erzeugung der Curven C' führt. Legen wir in die Ebene Σ eine beliebige Gerade g und ordnen in den Strahlenbüscheln um Q und R solche Strahlen einander zu, die sich auf g schneiden, so sind die Büschel projektiv aufeinander bezogen und befinden sich in perspektiver Lage, da die Gerade $Q\,R = o$, der gemeinsame Strahl, bei dieser Zuordnung sich selbst entspricht; g ist Perspektivitätsaxe. Transformieren wir diese Figur mittels $\mathfrak{T}_{1,1}$, so erhalten wir wieder zwei projektive Strahlenbüschel um R, Q, die aber nicht mehr perspektiv sind, da die Gerade o als Strahl von R durch q_1 als Strahl von Q durch r zu einem Geradenpaare I. Art ergänzt wird. Das Erzeugnis dieser projektiven Büschel ist der zu g verbundene Kegelschnitt. In unserer Collineation zwischen N und N' entsprechend erhalten wir in Σ' die der Gerade g und ihrem verbundenen Kegelschnitte korrespondierende Curve C' als Erzeugnis der Kegelschnitte des Systems G_I in Σ'.

§ 7. Die Coincidenzcurven und die Grenzcurven.

13. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die den Coincidenzcurven Ω, Φ' entsprechenden Curven Ω', Φ zu ermitteln. Die letztgenannten Curven bezeichnen wir als Grenzcurven, da jede in ihrem Felde diejenigen Punktepaare, denen reelle Punktepaare im anderen Felde entsprechen, von den Punkten trennt, deren entsprechende Punktepaare aus conjugiert imaginären Elementen bestehen. Um in die hier vorliegenden Verhältnisse klare Einsicht zu gewinnen, ist es zweckmässig, sich die Curve Ω (ganz analoges gilt für Φ'), welche alle Punkte der Art $X \equiv \overline{X}$ trägt, aus zwei unendlich nahe nebeneinander verlaufenden Curven $\Omega \infty \overline{\Omega}$ bestehend vorzustellen, von denen die eine, etwa Ω, sämtliche Punkte X, die andere, $\overline{\Omega}$, die ihnen verbundenen Punkte $\overline{X}$ enthält. Unter den Punkten von $\overline{\Omega}$, die einem beliebigen Punkte X von Ω unendlich benachbart sind, ist derjenige der dem X verbundene Punkt $\overline{X}$, dessen Verbindungsgerade mit X durch Punkt O geht.

Schneiden wir $\Omega \sim \overline{\Omega}$ mit einer beliebigen Gerade g, welche also kein Paar verbundener Punkte enthalten kann, so sind ihre Schnittpunkte mit $\Omega \sim \overline{\Omega}$ von der Art: $X \sim \overline{Z}$, $Y \sim \overline{W}$; die verbundenen Punkte $\overline{X} \sim Z$, $\overline{Y} \sim W$ befinden sich auf dem der g verbundenen Kegelschnitte. Ebenso gilt für eine beliebige Curve der Ebene Σ, dass ihre Schnittpunkte mit Ω weder sich selbst noch einander verbunden sein können.

Anders verhält es sich, wenn wir mit $\Omega \sim \overline{\Omega}$ eine Curve zum Schnitte bringen, die zu jedem ihrer Punkte auch den verbundenen enthält. Trifft diese Curve den Kegelschnitt Ω in einem Punkte X, so liegt der verbundene $\overline{X}$ einmal auf $\overline{\Omega}$, dem X unendlich benachbart auf der Gerade O X, sodann auch auf der genannten Curve selbst. Eine sich selbst verbundene Curve schneidet also Ω stets in Punkten (ausserhalb Q und R), von denen jeder sich selbst und keine zwei einander verbunden sind (§ 3, 5).

14. Ω und irgend eine Curve C, welche einer Gerade l' von Σ' entspricht, haben acht gemeinsame Punkte; die festen Punkte Q, R stellen zusammen vier derselben dar, folglich bleiben, da Ω keine weiteren festen Punkte enthält, noch vier veränderliche Schnittpunkte. Da C eine sich selbst verbundene Curve ist, muss nach dem Vorangehenden jeder dieser vier Punkte sich selbst verbunden sein. Ihnen entsprechen also in Σ' vier Paare verbundener Punkte, sämtlich auf Ω' und auch auf der Gerade l' und ihrem verbundenen Kegelschnitte gelegen. Die Verteilung der Punktepaare auf die letzten beiden Curven findet in bekannter Weise statt: Ω' begegnet der beliebig gewählten Gerade l' von Σ' in vier Punkten, ist also vierter Ordnung.

Da Ω keinen der Punkte V, $\overline{V}$ enthält, liegt V' nicht auf Ω'; folglich kann Ω' die Gerade v' nicht in veränderlichen Punkten schneiden, sondern nur in den festen Punkten T', U'; da beide gleichartig definiert sind, wird jeder als Doppelpunkt auf Ω' kommen. In der Tat: t_2 und u_2 treffen Ω in zwei veränderlichen Coincidenzpunkten $X \equiv \overline{X}$; ihnen entsprechen je zwei Punktepaare auf t' und u', welche einen

Punkt in T' bezw. U' gemeinsam haben. So kommen T', U' doppelt auf Ω'. Dies wird durch Folgendes bestätigt. Jede Gerade durch T' oder U' gehört einem Geradenpaare I. Art von N' an; greifen wir ein solches Geradenpaar heraus, so entspricht ihm ein Kegelschnitt von N, der Ω in zwei veränderlichen Coincidenzpunkten schneidet. Folglich muss das Geradenpaar in Σ' Ω' in zwei veränderlichen Paaren verbundener Punkte schneiden; jede Gerade des Geradenpaares enthält von jedem dieser Punktepaare einen Punkt, begegnet also der Curve Ω' in zwei veränderlichen Punkten; mithin repräsentiert der feste Punkt T' bezw. U' auf der Gerade zwei Schnittpunkte mit Ω', ist also, da gleiches für jeden Strahl durch ihn gilt, Doppelpunkt von Ω'.

Es fragt sich noch, ob die Punkte O', $\overline{O}'$ auf Ω' liegen können. Dies ist offenbar nicht möglich; denn ein beliebiger Strahl durch O schneidet Ω in zwei Coincidenzpunkten $X \equiv \overline{X}$; ihnen entsprechen zwei veränderliche Paare verbundener Punkte auf dem entsprechenden Kegelschnitte des Büschels (T', U', O', $\overline{O}'$) und auf Ω'. Ausser diesen vier veränderlichen Schnittpunkten beider Curven sind nur noch vier feste gemeinsame Punkte möglich; diese werden aber bereits durch T' und U' repräsentiert, mithin können sich O', $\overline{O}'$ nicht auf Ω' befinden.

Veränderliche Doppelpunkte sind, wie bei den Curven C und C', auch bei Ω' ausgeschlossen. Denken wir nämlich Ω wieder als $\Omega \sim \overline{\Omega}$, so besitzt jeder der Kegelschnitte Ω, $\overline{\Omega}$ weder einen Doppelpunkt noch ein veränderliches Paar verbundener Punkte. Ω' ist also ebenfalls vom Geschlechte eins.

Den Coincidenzcurven Ω, Φ' entsprechen Grenzcurven vierter Ordnung Ω', Φ vom Geschlechte eins, welche in den beiden festen Netzgrundpunkten ihres Feldes Doppelpunkte besitzen. Die Plückerschen Formeln ergeben für sie dieselben Zahlen wie für die Curven C': $k = 8$, $t = 8$, $w = 12$, wenn $n = 4$, $d = 2$, $r = 0$ eingesetzt werden.

Einfacher liesse sich Ω' auch so ableiten: dem Kegelschnitte Ω entspricht zunächst eine Curve achter Ordnung, auf

der T', U' je vierfach, O', $\overline{O'}$ je doppelt liegen. Den Punkten Q, R auf Ω entsprechend lösen sich q'_2, r'_2 je einfach, mit beiden also die Punkte T', U', O', $\overline{O'}$ doppelt ab; es bleibt eine Curve vierter Ordnung, der Ω und ebenso der $\overline{\Omega}$ entsprechend, welche T', U' doppelt enthält.

Umgekehrt entspricht der Curve Ω' zunächst eine Curve 16. Ordnung, welche durch Q, R je achtfach, durch V, $\overline{V}$ je vierfach geht. Es lösen sich t_2, u_2 je doppelt, mit ihnen zusammen die Punkte Q, R, V, $\overline{V}$ je vierfach ab, so dass eine Curve achter Ordnung bleibt, die Q und R zu vierfachen Punkten besitzt. Da aber Ω' sich selbst verbunden ist, reduziert sich die Curve achter Ordnung auf eine doppeltzählende Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in Q und R; in der Tat: sie besteht aus den beiden Kegelschnitten Ω, $\overline{\Omega}$.

§ 8. **Weitere Eigenschaften.**

15. Zu Anfang des vorigen § schnitten wir die Coincidenzcurve $\Omega \infty \overline{\Omega}$ mit einer beliebigen Gerade g in Punkten der Art: $X \infty \overline{Z}$, $Y \infty \overline{W}$. Die vier entsprechenden Punktepaare werden ebenfalls in zweimal zwei benachbarte zerfallen: $X' \infty Z'$, $\overline{X'} \infty \overline{Z'}$, $Y' \infty W'$, $\overline{Y'} \infty \overline{W'}$; sämtliche acht Punkte liegen auf C' und Ω' zugleich, folglich berührt C' die Curve Ω' viermal, und zwar so, dass zweimal zwei Berührungsstellen einander verbunden sind. Sie stellen die acht veränderlichen Schnittpunkte dar, die C' und Ω' überhaupt haben können. Weil die Berührungsstellen in zwei Paare verbundener zerfallen, giebt es im allgemeinen einen und nur einen Kegelschnitt des Netzes N', der sie alle vier enthält (§ 2, Ende). Ergebnis:

Die Grenzcurven Ω' und Φ werden von sämtlichen Curven C' bezw. C, welche den Geraden des anderen Feldes entsprechen, viermal berührt. Jedes Quadrupel solcher Berührungsstellen liegt auf einem bestimmten Kegelschnitte des Netzes N' bezw. N, da es zwei Paare verbundener Stellen umfasst.

Eine beliebige Curve m-ter Ordnung C^m begegnet der Coincidenzcurve $\Omega \infty \overline{\Omega}$ in 2m veränderlichen Punkten, die im allgemeinen weder sich selbst noch einander verbunden sind; jeder Schnittpunkt ist vielmehr von der Art: $X \infty \overline{Y}$. Jeder solchen Schnittstelle entsprechen zwei unendlich benachbarte Punktepaare, auf Ω' und der Curve, welche C^m entspricht, zugleich gelegen, also zwei einander verbundene Berührungsstellen beider Curven.

Die einer beliebigen Curve m-ter Ordnung von Σ (Σ') entsprechende Curve 4m. Ordnung berührt Ω' (Φ) an 4m Stellen, welche in 2m Paare verbundener zerfallen.

C^m schneidet Φ im allgemeinen in 4m veränderlichen und einander nicht verbundenen Punkten; hieraus ergeben sich 4m veränderliche Schnittpunkte von Φ' mit der unserer C^m entsprechenden Curve ausser den festen Punkten T', U', welche ihrerseits als 2m-fache Punkte der letztgenannten Curve für 4m gemeinsame Punkte zählen.

Die Involution verbundener Punkte auf der einer beliebigen Curve m-ter Ordnung entsprechenden Curve besitzt 4m Doppelpunkte. Für $m = 1$ ist diese Zahl 4.

16. Eine Gerade l durch Q schneidet $\Omega \infty \overline{\Omega}$ in zwei einander unendlich benachbarten veränderlichen Punkten $X \infty \overline{Y}$; wir schliessen hieraus, dass der dieser Gerade entsprechende Kegelschnitt Ω' doppelt berührt, und zwar in den Punkten $X' \infty Y'$, $\overline{X}' \infty \overline{Y}'$. Dies stand zu erwarten, da man sich diesen Kegelschnitt durch Reduktion aus einer Curve vierter Ordnung C', die zunächst der Gerade l entspricht, entstanden denken kann. Folglich muss, da die erwähnte C' Ω' viermal berührt, der sich ablösende Kegelschnitt q'_2 Ω' doppelt berühren. Dies folgt auch daraus, dass q ebenfalls ein Strahl durch Q ist. Analoges gilt für r'_2.

Alle Kegelschnitte des Systems G_I in Σ bezw. Σ' haben mit Φ bezw. Ω' doppelten Contact, und zwar an zwei einander verbundenen Stellen.

Dies muss auch für die im Systeme G_I enthaltenen Geradenpaare gelten. Da haben wir nach § 6 zunächst vier Geradenpaare I. Art in G_I. Da die beiden Geraden eines

solchen Paares einander verbunden sind, so müssen sich die beiden (einander verbundenen) Berührungsstellen mit Ω' auf beide Geraden verteilen; mithin haben wir in diesen vier Geradenpaaren I. Art die beiden Tangentenquadrupel aus T' und U' an Ω' bezw. aus Q und R an Φ.

Die beiden Quadrupel von Geradenpaaren I. Art in Σ *und* Σ', *denen wieder Geradenpaare I. Art entsprechen und welche einander entsprechend sind, werden von den vier Tangentenquadrupeln aus den vier festen Netzgrundpunkten an die Curven* Φ *und* Ω' *gebildet.*

Was ferner die beiden in G_I von Σ' befindlichen Geradenpaare II. Art betrifft, welche den Geradenpaaren I. Art: $(Q\ V, R\ \overline{V})$, $(Q\ \overline{V}, R\ V)$ von Σ korrespondieren, so müssen, damit der doppelte Contakt mit Ω' in veränderlichen Punkten zustande kommt, ihre veränderlichen Bestandteile, also die Geraden durch V', die Curve Ω' doppelt berühren. Dies geschieht in Punkten der Art $X' \infty Y'$, $\overline{X}' \infty \overline{Y}'$. Wir haben also zwei Sätze:

An Φ *bezw.* Ω' *gehen aus dem Inversionszentrum ihres Feldes zwei Doppeltangenten, von denen jede an zwei einander verbundenen Stellen berührt.*

Die beiden Geradenpaare II. Art jedes Feldes, denen Geradenpaare I. Art im anderen Felde entsprechen, bestehen aus den genannten Doppeltangenten aus O (V') *an* Φ (Ω') *und aus der Gerade* o (v').

Umgekehrt muss jeder Kegelschnitt des Netzes N', welcher Ω' in einem veränderlichen Punkte berührt, dem Systeme G_I angehören. Denn weil er Ω' an einer Stelle $X' \infty Y'$ berührt und er selbst sowie Ω' sich selbst verbunden ist, so liegen auch $\overline{X}' \infty \overline{Y}'$ auf beiden Curven, es findet eine zweite Berührung statt. Der entsprechende Kegelschnitt in Σ muss durch die einander benachbarten Punktepaare $X \equiv \overline{X}$, $Y \equiv \overline{Y}$ gehen, also Ω berühren. Nun gibt es aber im Netze N keinen allgemeinen Kegelschnitt, der Ω in einem veränderlichen Punkte berührte; denn der einzige nicht zerfallende Kegelschnitt K von N, der Ω berührt, und zwar gleich doppelt berührt, tangiert in den festen Punkten

Q, R. Soll also ein Kegelschnitt von N Ω in zwei unendlich benachbarten Punkten schneiden, so muss er in ein Geradenpaar mit Doppelpunkt auf Ω, also I. Art zerfallen, dessen eine Gerade $\Omega \sim \overline{\Omega}$ etwa in den Punkten $X \sim \overline{Y}$ trifft, während die andere Gerade die Punkte $\overline{X} \sim Y$ enthält. Folglich sind die Kegelschnitte der Systeme G_1 in Σ und Σ' die einzigen der Netze N, N', welche Φ bezw. Ω' doppelt, und zwar an einander verbundenen Stellen berühren.

Der erwähnte Kegelschnitt K aus N, der Ω in Q und R berührt, schneidet q und r je in zwei benachbarten Punkten, welche einander verbunden sind. Diesen entsprechen auf den Kegelschnitten q'_2 und r'_2 Paare verbundener Punkte, die zugleich auf Ω' sich befinden. Nun berühren aber q'_2 und r'_2 Ω' an zwei einander verbundenen Stellen; folglich geht der dem K entsprechende Kegelschnitt von N' durch die vier Berührungspunkte der Hauptkegelschnitte q'_2, r'_2 mit Ω'. Ebenso korrespondiert dem Kegelschnitte von N', der Φ' in T' und U' berührt, derjenige Kegelschnitt von N, welcher die vier Berührungspunkte von t_2 und u_2 mit Φ enthält.

17. Auch unter den Curven C und C' wird jede durch ein System von Kegelschnitten des Netzes ihrer Ebene doppelt tangiert. Liegt eine beliebige Gerade g in Σ vor, so giebt es in jedem ihrer Punkte einen Kegelschnitt von N, der sie hier berührt (in $X \sim Y$). Die entsprechenden Kegelschnitte des Netzes N' haben mit der einer Gerade g entsprechenden C' zwei benachbarte Paare verbundener Punkte gemeinsam, berühren also C' doppelt, und zwar an zwei einander verbundenen Stellen.

Umgekehrt folgt leicht, dass jedem Kegelschnitte aus N', der C' in einem veränderlichen Punkte berührt, ein Kegelschnitt aus N entspricht, welcher g und natürlich auch den verbundenen Kegelschnitt berührt.

Wir bezeichnen das System der Kegelschnitte des Netzes N (N'), welche eine der Curven C (C') doppelt, und zwar an zwei veränderlichen, einander verbundenen Stellen berühren, mit $\mathfrak{G}$, gleichgültig, zu welchem Felde und zu welcher Curve es gehört. Durch einen beliebigen Punkt von

Σ wird ein Büschel des Netzes N festgelegt, von dem zwei Elemente die Gerade g berühren; folglich gehen auch durch einen beliebigen Punkt von Σ' zwei Kegelschnitte des Systems $\mathfrak{G}$, oder $\mathfrak{G}$ schickt in jeden Büschel von N′ zwei Elemente. Dies muss auch inbezug auf den Büschel (V′) gelten, d. h. das System $\mathfrak{G}$ enthält zwei Geradenpaare II. Art. Da von diesen nur die Geraden durch V′ in veränderlichen Punkten berühren können, müssen diese Geraden je beide einander verbundenen Berührungspunkte enthalten, also Doppeltangenten der Curve C′ sein.

An jede Curve eines Feldes, welche einer beliebigen Gerade des anderen Feldes entspricht, gehen aus dem Inversionscentrum ihres Feldes zwei Doppeltangenten. Die beiden Berührungspunkte jeder derselben sind einander verbunden, und alle vier Berührungspunkte liegen auf einem bestimmten Kegelschnitte des Netzes N bezw. N′.

Die Geradenpaare 1. Art des Systems $\mathfrak{G}$ sind schon von § 6, 2 her bekannt. Ihre Anzahl ist vier; sie bestehen aus den zweimal vier Tangenten aus T′ und U′ an die Curve C′ und entsprechen den vier Kegelschnitten des Systems G_I in Σ, welche g berühren.

Doppelgeraden besitzt das System $\mathfrak{G}$ nicht, weil das Netz seines Feldes selbst keine Doppelgerade enthält. Denn da jeder Kegelschnitt des Netzes sich selbst, der Gerade o bezw. v′ aber nur der Punkt O bezw. V′ verbunden ist, so kann letztgenannte Gerade nur durch einen Strahl durch O bezw. V′ zu einem Geradenpaare von N bezw. N′ ergänzt werden. Aus der Anzahl $\delta = 6$ der Geradenpaare, $\varepsilon = 0$ der Doppelgeraden und der Anzahl $\mu = 2$ der durch einen gegebenen Punkt der Ebene gehenden Kegelschnitte von $\mathfrak{G}$ folgt mittels der Chaslesschen Formeln, dass $\nu = 4$ Kegelschnitte von $\mathfrak{G}$ eine gegebene Gerade derselben Ebene berühren. Also:

Es giebt in jeder der beiden Ebenen vier Kegelschnitte des Netzes, welche eine bestimmte Curve dieses Feldes, die einer beliebigen Gerade des anderen entspricht, doppelt (an zwei einander verbundenen Stellen) und ausserdem eine ge-

gegebene Gerade derselben Ebene (und natürlich auch deren verbundenen Kegelschnitt) einfach berühren.

Den beiden Kegelschnitten, welche $\mathfrak{G}$ in Σ' mit dem Büschel $(T', U', O', \bar{O}')$ gemeinsam hat, entsprechen die Geradenpaare II. Art in Σ, welche g berühren, d. h. ihren Doppelpunkt auf g haben. Da g die Gerade o nur einmal trifft, vereinigen sich diese Geradenpaare in demjenigen, dessen Doppelpunkt jener Schnitt (g, o) ist, dessen veränderliche Gerade also den der g verbundenen Kegelschnitt in O tangiert. Aus der collinearen Beziehung zwischen N und N′ folgt, dass die erwähnten beiden Kegelschnitte, welche $\mathfrak{G}$ in den Büschel $(T', U', O', \bar{O}')$ sendet, ebenfalls identisch sind.

Da ferner jeder der beiden Schnittpunkte von g mit Ω zwei vereinigte Geradenpaare I. Art aus N ausscheidet, haben die Systeme G_I und $\mathfrak{G}$ in Σ' zwei Elemente gemeinsam, von denen jedes doppelt zählt; jeder dieser beiden Kegelschnitte enthält ein Paar verbundener Berührungsstellen von C′ mit Ω', berührt also C′ und Ω' in diesen Punkten.

Legen wir in die Ebene Σ eine beliebige Gerade l, so gehen durch jeden Punkt derselben zwei Kegelschnitte von N, welche unsere Gerade g berühren. Ordnen wir die beiden weiteren Schnittpunkte dieser Kegelschnitte mit l dem Ausgangspunkte zu, so erhalten wir auf l eine Punktkorrespondenz [2,2], deren vier Coincidenzen sämtlich von Berührungen herrühren; folglich giebt es vier Kegelschnitte des Netzes N, welche g und l berühren. Wir schliessen hieraus, dass *irgend zwei Systeme* $\mathfrak{G}$ *vier Elemente gemeinsam* haben.

18. Wir wissen, dass jede Curve C (C′) der Coincidenzcurve Ω (Φ') ihres Feldes in vier veränderlichen Punkten begegnet (§ 7, 2) und dass diese die Doppelpunkte der auf C (C′) befindlichen Involution verbundener Punkte sind (§ 3, 2). Als solche sind sie Berührungspunkte von Tangenten aus O (V′) an die Curven; die übrigen vier Tangenten aus O (V′), welche die Klasse acht der Curven C (C′) erfordert, werden durch die beiden Doppeltangenten dargestellt.

Ebenso hat Φ (Ω') mit Ω (Φ'), wie eine einfache Abzählung lehrt, vier veränderliche gemeinsame Punkte, Doppelpunkte der Involution verbundener Punkte auf Φ (Ω'), Berührungspunkte von vier einfachen Tangenten aus O (V'); die beiden Doppeltangenten aus O (V') an diese Curve ergänzen diese Anzahl zu acht.

Diese Tangenten verschiedener Art aus den Inversionscentren an die Curven C und C', Φ und Ω' lassen noch eine andere Deutung zu. Auf jeder der genannten Curven befinden sich zwei Punktbeziehungen: 1. eine Beziehung zwischen verbundenen Punkten, das ist die Involution verbundener Punkte auf der Curve mit vier Doppelpunkten; in diesen berühren die vier einfachen Tangenten; 2. eine Beziehung zwischen Paaren verbundener Punkte, die immer auf demselben Strahle durch das Inversionscentrum liegen. Zweimal kommt es vor, dass zwei in dieser Weise einander zugeordnete Punktepaare auf einer der genannten Curven zusammenfallen; die Trägergeraden dieser vereinigten Punktepaare sind die beiden Doppeltangenten aus dem Inversionscentrum an die Curve.

Im Anschlusse hieran sei erwähnt, dass wir uns jede Curve C (C'), ebenso Φ (Ω') durch die Strahlenbüschel um Q und R (T' und U') erzeugt denken können.

19. Bestimmen wir die drei Chaslesschen Charakteristiken der Curven jedes Feldes, welche den Geraden des anderen entsprechen. Wieviel Curven, etwa C', gehen durch zwei beliebig gegebene Punkte X', Y' von Σ'? Enthält eine Curve C' die Punkte X', Y' (und natürlich auch deren verbundene $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$), so müssen die entsprechenden Punktepaare X, $\overline{X}$ und Y, $\overline{Y}$ in Σ sich auf der dieser C' entsprechenden Gerade und ihrem verbundenen Kegelschnitte befinden. Dabei muss die Gerade ersichtlich zwei Punkte aus verschiedenen Paaren enthalten. Von den sechs überhaupt durch X, $\overline{X}$, Y, $\overline{Y}$ festgelegten Verbindungsgeraden genügen nur vier dieser Bedingung, auszuschliessen sind die O-Strahlen X $\overline{X}$ und Y $\overline{Y}$. Umgekehrt entspricht jeder dieser vier Geraden eine Curve C', welche jedes der beiden Punktepaare

X', $\bar{X}'$, Y', $\bar{Y}'$, enthalten muss; die erste Charakteristik ist also 4.

Nunmehr geben wir in Σ' beliebig einen Punkt X' und eine Gerade l'; wieviel Curven C' enthalten X' und berühren l'? Der Berührungsstelle $Y' \infty Z'$ von C' mit l' entsprechen zwei einander benachbarte Paare verbundener Punkte auf der unserer l' entsprechenden Curve C und der jener C' korrespondierenden Gerade g nebst ihrem verbundenen Kegelschnitte; g muss also C einfach berühren. Da ferner C' durch X' (und $\bar{X}'$) geht, muss die Gerade g durch einen der Punkte des entsprechenden Paares X, $\bar{X}$ gehen. Diesen Bedingungen genügen die zweimal acht Tangenten aus X und $\bar{X}$ an C; und umgekehrt entspricht jeder dieser Tangenten eine Curve C', welche das Punktepaar X', $\bar{X}'$ enthält und die Gerade l' sowie ihren verbundenen Kegelschnitt berührt. Die zweite Charakteristik ist 16.

Fragen wir endlich, wie viele Curven C' zwei beliebig gegebene Geraden l_1', l_2' einfach berühren, so kommt dies darauf hinaus, wie viele gemeinsame Tangenten die den Geraden l_1', l_2' entsprechenden Curven C_1, C_2 in Σ besitzen. Da beide Curven achter Classe sind, so ist diese Anzahl 64. Umgekehrt entspricht jeder dieser gemeinsamen Tangenten von C_1, C_2 eine Curve C', welche l_1', l_2' und natürlich auch deren verbundene Kegelschnitte berührt. Die dritte Charakteristik ist also 64.

Das System der Curven jedes Feldes, welche den Geraden des anderen entsprechen, besitzt die Charakteristiken 4, 16, 64.

Ein beliebig gegebenes Paar verbundener Punkte X, $\bar{X}$ in Σ bestimmt ∞^1 Geraden der Ebene, welche wenigstens einen seiner Punkte enthalten. Folglich legt das entsprechende Punktepaar X', $\bar{X}'$ in Σ' oder auch jeder seiner Punkte allein ein einfach unendliches System von Curven C' fest; diese lassen sich, entsprechend den beiden Strahlenbüscheln um X und $\bar{X}$, in zwei Reihen zerlegen; beiden Reihen von Curven gemeinsam ist das dem Strahle X $\bar{X}$ entsprechende Element, ein doppeltzählender Kegelschnitt des Büschels (T', U', O', $\bar{O}'$). Von diesem System gehen, wie die oben

gefundenen Charakteristiken zeigen, vier durch einen gegebenen Punkt, während 16 eine gegebene Gerade berühren.

20. Wählen wir insbesondere statt des beliebigen Paares X, $\overline{X}$ das Punktepaar V, $\overline{V}$, so löst sich von jeder C′, welche einer Gerade durch V oder $\overline{V}$ entspricht, dem Punkte V bezw. $\overline{V}$ entsprechend, die Hauptgerade v′ mit den Punkten T′, U′ einfach ab; es bleibt eine Curve dritter Ordnung, welche die vier Hauptpunkte in Σ' und auch den Punkt V′ einfach enthält und, wie jede C′, die Curve Ω' viermal, und zwar an zweimal zwei einander verbundenen Stellen berührt. Auch dieses Curvensystem zerfällt, den Strahlenbüscheln um V und $\overline{V}$ entsprechend, in zwei Reihen, deren gemeinsames Element dem Strahle V $\overline{V}$ O entspricht, also aus der doppeltzählenden Gerade V′ O′ $\overline{O}'$ und der Gerade v′ besteht. Da ferner von den Strahlen durch V bezw. $\overline{V}$ nur V $\overline{V}$ O Paare verbundener Punkte enthält, so besitzen die Curven unseres Systems — nennen wir es $\mathfrak{B}'$ — keinen veränderlichen Doppelpunkt; dass sie auch keinen festen Doppelpunkt besitzen, folgt aus dem Obigen. Die Curven von $\mathfrak{B}'$ sind vom Geschlechte eins.

In den Curven des Systems $\mathfrak{B}'$ haben wir den einfachsten Typus von sich selbst verbundenen Curven in Σ', welche centrale Involutionen verbundener Punkte tragen, in dem Sinne, dass das Involutionscentrum auf der Curve selbst liegt. Jeder Strahl durch V′ schneidet aus jeder Curve von $\mathfrak{B}'$ noch ein Paar verbundener Punkte aus; nun begegnet diese Curve der Gerade v′ ausser in den festen Punkten T′, U′ noch in einem veränderlichen Punkte; sein Verbindungsstrahl mit V′ muss den ihm verbundenen Punkt, also wieder V′ in die Curve einschneiden, mithin die Curve in V′ berühren. — Die vier veränderlichen Schnittpunkte der Curve mit Φ' lehren, dass die centrale Involution auf ihr vier Doppelpunkte besitzt; in ihnen berühren die einzigen Tangenten aus V′, welche überhaupt die Curve anderwärts berühren können.

Wie bekannt, entsprechen den beiden Geradenpaaren I. Art des Büschels (Q, R, V, $\overline{V}$) zwei Geradenpaare II. Art in Σ', etwa (g', v'), (g'', v'), wo g' und g'' die Doppeltangenten aus V' an Ω' sind. Folglich befinden sich, den Geraden V Q, V R, $\overline{V}$ Q, $\overline{V}$ R entsprechend, folgende vier Curven in dem Systeme $\mathfrak{B}'$: g' nebst q_2', g'' nebst r_2', g'' nebst q_2', g' nebst r_2'.

Durch einen beliebigen Punkt in Σ' gehen vier Curven von $\mathfrak{B}'$, während eine beliebige Gerade, die in Σ' gegeben wird, entsprechend den zweimal sechs anderwärts berührenden Tangenten aus V und $\overline{V}$ an die entsprechende C, zwölf Curven von $\mathfrak{B}'$ berühren.

Analog den drei Erzeugungen, welche wir für die Curven C und C′ kennen gelernt haben: 1) mittels zweier zwei-zweideutig verwandter Kegelschnittbüschel des Netzes, deren gemeinsames Element sich selbst entspricht (§ 4, 7), 2) mittels einer zwei-zweideutigen Korrespondenz zwischen den Kegelschnitten des Systems G_1 (§ 6, 12), 3) mittels einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft der Strahlenbüschel um die beiden Netzgrundpunkte des Feldes (18), erhalten wir auch für die Curven dritter Ordnung von $\mathfrak{B}'$ drei Herstellungsweisen aus den Elementen unserer Verwandtschaft, nur dass hier jedesmal zwei Geradenpaare II. Art in Σ' entsprechend werden, so dass deren gemeinsamer Bestandteil, die Gerade v', sich selbst entspricht, also sich von dem Erzeugnisse vierter Ordnung ablöst.

Ein dem Systeme $\mathfrak{B}'$ gleichartiges System von Curven dritter Ordnung ergiebt sich im Felde Σ; es entspricht der Gesamtheit aller Geraden von Σ', welche durch die Punkte O', $\overline{O}'$ gehen.

21. Ein bedeutend umfangreicheres System $\mathfrak{S}$ wird von den Curven gebildet, welche den Kegelschnitten des Gebüsches durch die beiden festen Grundpunkte eines Feldes entsprechen. Von der Curve achter Ordnung mit vierfachen Punkten in T', U' und Doppelpunkten in O', $\overline{O}'$, welche zunächst einem Kegelschnitte von Σ entspricht, lösen sich, wenn letzterer dem Gebüsche (Q, R) angehört, den Haupt-

punkten Q und R entsprechend die Kegelschnitte q_2' und r_2' je einfach und mit ihnen die vier Hauptpunkte von Σ' je doppelt ab; es bleibt eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in T′ und U′.

Ist ferner K ein Kegelschnitt des Gebüsches (Q, R), so geht sein verbundener Kegelschnitt nur noch durch die festen Punkte Q und R einfach, gehört also ebenfalls dem Gebüsche an; seine beiden veränderlichen Schnittpunkte mit Ω sind zugleich seine variabelen Schnitte mit K, folglich giebt es unter den Schnittpunkten von K mit seinem verbundenen Kegelschnitte keine zwei einander verbundenen Punkte, also auf K selbst kein Paar verbundener Punkte: die entsprechende Curve von $\mathfrak{S}$ in Σ' besitzt keinen veränderlichen Doppelpunkt.

Um zu erkennen, ob mit T′, U′ die Anzahl der festen Punkte des Systems $\mathfrak{S}$ erschöpft ist, zählen wir die gemeinsamen Punkte zweier beliebigen Curven von $\mathfrak{S}$ ab. Von den 16 Schnittpunkten werden acht durch die beiden festen Punkte T′, U′ repräsentiert; andererseits schneiden sich die beiden entsprechenden Paare verbundener Kegelschnitte des Gebüsches in Σ in 16 Punkten: ausser in Q und R, welche zusammen acht gemeinsame Punkte darstellen, in acht veränderlichen Punkten, welche in vier Paare verbundener zerfallen. Ihnen entsprechen vier Paare verbundener veränderlicher Schnittpunkte der betrachteten beiden Curven von $\mathfrak{S}$ in Σ'. Mit diesen acht veränderlichen und den durch T′, U′ dargestellten acht festen Punkten ist die Anzahl 16 der möglichen gemeinsamen Punkte der beiden Curven erschöpft: T′, U′ sind die einzigen festen Punkte des Systems $\mathfrak{S}$. Die Curven desselben besitzen also nur zwei Doppelpunkte, keinen Rückkehrpunkt, sind also vom Geschlechte eins.

Die beiden veränderlichen Schnittpunkte von K mit $\Omega \sim \overline{\Omega}$ sind der Art $X \sim \overline{Z}$, $Y \sim \overline{W}$; folglich berührt die entsprechende Curve von $\mathfrak{S}$ Ω' an vier Stellen, welche in zwei Paare verbundener zerfallen. Diese vier Berührungspunkte liegen also auf einem und demselben Kegelschnitte des Netzes N′.

Den vier veränderlichen Schnittpunkten von K mit Φ entsprechen vier gemeinsame Punkte der entsprechenden Curve von $\mathfrak{S}$ in Σ' mit Φ'; in diesen berühren vier Tangenten aus V', da diese vier Punkte als veränderliche Schnitte der Curve mit Φ' Doppelpunkte der auf der Curve befindlichen Involution verbundener Punkte sind. Hieraus schliessen wir, dass die vier übrigen Tangenten aus V' an die Curve achter Classe durch zwei Doppeltangenten aus V' an die Curve repräsentiert werden, von denen jede an zwei einander verbundenen Stellen berührt. In der Tat: sie entsprechen den beiden Kegelschnitten des Büschels (Q, R, V, $\overline{\text{V}}$), welche K in veränderlichen Punkten berühren.

Auch diese Curven können ähnlich wie die Curven C und C' mittels der Elemente der gegebenen Kegelschnittnetze N, N' erzeugt werden. Da ferner zum Gebüsche (Q, R) in Σ alle Geraden dieses Feldes, je durch o zu einem Geradenpaare ergänzt, gehören, so sehen wir, dass die Curven C' ebenfalls dem System $\mathfrak{S}$ in Σ' angehören; sie werden ausgeschieden durch das Punktepaar O', $\overline{\text{O}}'$. Dasselbe gilt von den Kegelschnitten des Netzes N', wofern man sie doppelt zählt, da die entsprechenden Kegelschnitte von N sich selbst verbunden sind; (die Aussage über die Punkte O', $\overline{\text{O}}'$ findet natürlich auf sie keine Anwendung).

22. Wenden wir uns folgender Frage zu: giebt es Coincidenzpunkte $\text{X} \equiv \overline{\text{X}}$ in Σ, denen wieder Coincidenzpunkte in Σ' entsprechen? Weil die Punkte $\text{X} \equiv \overline{\text{X}}$ auf Ω liegen, muss das entsprechende Punktepaar X', $\overline{\text{X}}'$ der Curve Ω' angehören, und, weil X' und $\overline{\text{X}}'$ wieder coincidieren sollen, müssen sie sich in einem Punkte von Φ' vereinigen. $\text{X}' \equiv \overline{\text{X}}'$ ist also Schnittpunkt von Ω' und Φ'. Umgekehrt folgt hieraus, dass $\text{X} \equiv \overline{\text{X}}$ auf Ω und Φ zugleich liegen muss. Da Ω und Φ, ebenso Ω' und Φ' vier veränderliche Schnittpunkte besitzen und die vier einen zu den vier anderen entsprechend sind, so folgt:

Die vier veränderlichen Schnittpunkte von Ω und Φ, ebenso die von Ω' und Φ', sind die einzigen Coincidenzpunkte ihres Feldes, denen wieder Coincidenzpunkte des anderen

Feldes entsprechen. Diese zweimal vier Punkte entsprechen einander.

Wir bezeichnen die vier Coincidenzpunkte in Σ mit S_1, S_2, S_3, S_4, die vier entsprechenden in Σ' mit S_1', S_2', S_3', S_4'. Es giebt also vier Büschel mit vereinigten Grundpunkten ($X \equiv \overline{X}$) im Netze jedes Feldes, denen ebensolche Büschel im anderen entsprechen. Alle Kegelschnitte eines solchen Büschels (S) berühren Φ im Punkte S; mithin stellen die sechs Kegelschnitte, welche die vier Büschel (S_i) zu je zweien gemeinsam haben, sechs Elemente des Netzes N dar, welche Φ doppelt, und zwar nicht, wie etwa die Kegelschnitte des Systems G_I an zwei einander verbundenen Stellen, sondern in zwei sich selbst verbundenen Punkten berühren. Die ihnen entsprechenden sechs Kegelschnitte von N′ gehen durch die entsprechenden Coincidenzpunkte S_i' und haben für Ω' dieselbe Bedeutung wie die Kegelschnitte in Σ für Φ. Aus der Konstruktion und aus dem Umstande, dass die vier Punkte S_i (S_i') die einzigen Coincidenzpunkte auf Φ (Ω') sind, geht hervor, dass die gefundenen sechs Kegelschnitte und ihre entsprechenden die einzigen ihrer Art sind.

Es giebt in dem Netze jedes Feldes sechs Kegelschnitte, welche Ω' bezw. Φ doppelt, und zwar an zwei sich selbst verbundenen Stellen (Punkten S_i' bezw. S_i) berühren. Diese zweimal sechs Kegelschnitte beider Felder entsprechen einander.

Der Nachbarpunkt Y′ von S′ ($X' \equiv \overline{X}'$) auf Ω' scheidet aus dem Büschel (S′) einen Kegelschnitt aus, dessen vierter veränderlicher Schnittpunkt $\overline{Y}'$ mit Ω' dem Punkte $\overline{X}'$ unendlich benachbart sein muss. Es giebt also vier Kegelschnitte des Netzes N′, von denen jeder Ω' in einem Coincidenzpunkte S′ vierpunktig berührt. Diesen gemeinsamen Punkten entsprechen auf Ω Punkt S ($X \equiv \overline{X}$) und sein Nachbarpunkt $Y \equiv \overline{Y}$; der entsprechende Kegelschnitt aus N muss also Ω berühren, mithin in ein Geradenpaar zerfallen.

In jedem der vier Punkte S (S′) *eines Feldes berührt ein und nur ein Kegelschnitt des Netzes die Curve* Φ (Ω') *vierpunktig. Diese vier Kegelschnitte entsprechen den Geraden-*

paaren I. Art, welche durch die vier Punkte S′ (S) *des anderen Feldes festgelegt werden, und in jedem sind die zwei durch den betreffenden Punkt* S (S′) *aus* G_1 *ausgeschiedenen Kegelschnitte vereinigt.*

Ein beliebiger Strahl durch einen Punkt S ($X \equiv \overline{X}$) schneidet $\Omega \infty \overline{\Omega}$ in Punkten $X \infty \overline{Z}$, $Y \infty \overline{W}$, folglich liegen auf C′ und Ω′ die Punktepaare $X' \equiv \overline{X}'$ und $Z', \overline{Z}'$, ebenso $Y', \overline{Y}'$ und $W', \overline{W}'$ einander unendlich nahe, so dass $Y' \infty W'$, $\overline{Y}' \infty \overline{W}'$ ist. Also:

Dem Strahlenbüschel um einen Punkt S (S′) entspricht im anderen Felde ein System von Curven C′ (C), welche Ω′ (Φ) in dem entsprechenden Punkte S′ (S) vierpunktig und ausserdem an zwei einander verbundenen Stellen einfach berühren.

Lassen wir den betrachteten Strahl sich um S drehen, bis die Punkte $Y \infty \overline{W}$ den Punkten $X \infty \overline{Z}$ unendlich nahe gerückt sind, so müssen sich auch die beiden entsprechenden Paare, einander unendlich benachbart, den beiden anderen Paaren auf Ω′ unendlich genähert haben. *Der Tangente an* Ω *in einem Punkte S entspricht also eine Curve C′, welche mit Ω′ in S′ eine achtpunktige Berührung hat.* Hierbei schliesst immer ein Paar verbundener Punkte an der Berührungsstelle das andere ein (entsprechend der Folge der Geraden durch V′, welche diese Paare in Ω′ und C′ einschneiden), so dass wir etwa die Folge haben: $W' \infty Y' \infty Z' \infty X' \equiv \overline{X}' \infty \overline{Z}' \infty \overline{Y}' \infty \overline{W}'$.

Die beiden hier deutlich zu unterscheidenden Gruppen von je vier Punkten trennen sich, wenn wir die Tangente in einem beliebigen Punkte von Ω und ihre entsprechende Curve betrachten. Eine solche Tangente schneidet $\Omega \infty \overline{\Omega}$ in Punkten $X \infty \overline{W} \infty Y \infty \overline{Z}$; diesen entsprechen vier Paare verbundener Punkte, die ebenfalls einander unendlich nahe liegen. *Einer beliebigen Tangente von* Ω *entspricht also eine Curve C′, welche Ω′ an zwei einander verbundenen Stellen vierpunktig berührt.*

Dem Verbindungsstrahle zweier Punkte S muss nach dem Gesagten eine Curve C′ entsprechen, welche Ω′ in den beiden

entsprechenden Punkten S' vierpunktig berührt. Diese Berührungsstellen sind von der Art $Z' \infty X' \equiv \overline{X}' \infty Z'$ und $W' \infty Y' \equiv \overline{Y}' \infty \overline{W}'$, wobei mit $X' \equiv \overline{X}'$ und $Y' \equiv \overline{Y}'$ die beiden Punkte S' bezeichnet sind. *Es giebt also sechs Curven C' (C), welche Ω' (Φ) in je zwei Punkten S' (S) vierpunktig berühren.*

Den Strahlen aus den vier Punkten S nach V und $\overline{V}$ entsprechen acht Curven des Systems $\mathfrak{V}'$, welche je in dem entsprechenden Punkte S' Ω' vierpunktig und ausserdem an zwei einander verbundenen Stellen einfach tangieren.

Den Kegelschnitten des Gebüsches (Q, R) entsprechen die Curven vierter Ordnung von $\mathfrak{S}$. Geht ein solcher Kegelschnitt durch einen Punkt S, so gilt für seine entsprechende Curve dasselbe wie für eine C', die einem Strahle durch S entspricht. Da durch einen Punkt S ein Netz, durch zwei Punkte S ein Büschel aus dem Gebüsche (Q, R) ausgeschieden wird, so erhalten wir in Σ' vier doppelt unendliche Systeme von Curven aus $\mathfrak{S}$, welche Ω' in einem Punkte S' vierpunktig und sonst noch an zwei einander verbundenen Stellen einfach berühren, und sechs einfach unendliche Systeme in $\mathfrak{S}$, vorigen vier Systemen zu je zweien gemeinsam, von Curven, welche Ω' in zwei Punkten S' je vierpunktig berühren. Die vier Kegelschnitte, welche je drei der zuerst erwähnten vier Netze (S) aus (Q, R) gemeinsam haben, vereinigen sich in dem Kegelschnitte Ω, also die vier entsprechenden Curven von $\mathfrak{S}$ in Ω'.

§ 9. Spezialfälle der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$.

23. Nachdem die Untersuchung der allgemeinen Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ so weit geführt ist, dass mit Hilfe der angegebenen Sätze leicht weitere Schlüsse gezogen werden können, wenden wir uns jetzt zu einigen Spezialfällen unserer Verwandtschaft, beschränken uns hier aber auf die blosse Erwähnung und wenige Bemerkungen.

Eine Spezialisierung der betrachteten Verwandtschaft kann, wie ihr Aufbau lehrt, auf folgende Weisen herbei-

geführt werden. Man kann den beiden Ebenen Σ, Σ' eine spezielle Lage zu einander geben, insbesondere beide Felder zusammenfallen lassen; man kann ferner die Grundpunkte der Kegelschnittnetze in spezieller Weise wählen; man kann aus den einmal festgelegten Kegelschnittgebüschen Netze besonderer Art herausgreifen und endlich auch die collineare Beziehung zwischen den Netzen beider Ebenen nicht mehr allgemein annehmen. Jeder einzelne dieser Fälle und Kombinationen mehrerer derselben führen zu einer grossen Menge von Spezialfällen unserer $\mathfrak{T}_{2,2}$. Wir heben folgende beiden hervor:

24. Die verwandten Felder Σ, Σ' seien ganz beliebig in eine und dieselbe Ebene E gelegt. Dann erhebt sich zunächst die Frage nach Punkten von E, welche sich selbst entsprechen. Ein solcher Punkt $X \equiv X'$ muss aus den Netzen N, N′ entsprechende Büschel ausscheiden. Nach einem bekannten Satze über collineare Curvennetze derselben Ebene giebt es, wenn sie n_1-ter resp. n_2-ter Ordnung sind, $n_1^2+n_1n_2+n_2^2$ Punkte in der Ebene, von denen jeder gemeinsamer Grundpunkt zweier entsprechenden Büschel aus den Netzen ist. (Man erhält diesen Satz durch Schnitt mit einer Ebene aus dem Ergebnis für die räumliche Figur: Der Ort der gemeinsamen Punkte der Grundkurven entsprechender Büschel von zwei kollinearen Flächennetzen der Ordnungen n_1 und n_2 ist eine Raumcurve der Ordnung $n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2$. Vergleiche L. Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, Berlin 1870, Nr. 126 Ende). Zu diesen zwölf Punkten gehören auch die zweimal zwei festen Netzgrundpunkte, und zwar einfach, da jeder derselben einen und nur einen Büschel des anderen Netzes ausscheidet, dessen einziger entsprechender Büschel in ihm einen Grundpunkt hat; aber diese vier Punkte sind nicht in unserer $\mathfrak{T}_{2,2}$ sich selbst entsprechende Punkte der Art $X \equiv X'$, da jeder von ihnen für die Büschel seines Netzes ein fester, nicht ein veränderlicher Grundpunkt ist.

Fallen die Felder Σ, Σ' beliebig ineinander, so giebt es acht Punkte der gemeinsamen Trägerebene, welche sich mit

einem ihrer entsprechenden Punkte vereinigen. Sie und die vier festen Netzgrundpunkte zusammen bilden die Grundpunkte des Netzes der allgemeinen Curven vierter Ordnung, welche durch jede zwei einander entsprechende, also projektive Kegelschnittbüschel beider Netze erzeugt werden.

Die gefundenen acht Coincidenzpunkte liefert auch das Korrespondenzprincip der Ebene, nämlich $n + n_1 + m$, wenn zwischen den Ebenen Σ, Σ' eine n-n_1-deutige Korrespondenz besteht und einer Gerade des einen Feldes eine Curve m. Ordnung im anderen entspricht (R. Sturm, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, I. Teil, Leipzig 1892, S. 39); bei uns: $2 + 2 + 4 = 8$.

Ein beliebiger Punkt $X \equiv Y'$ der Ebene E bestimmt in jedem der Netze N, N' einen Büschel: B_1 in N, B'_2 in N'. B'_2 hat mit dem zu B_1 entsprechenden Büschel B'_1 einen Kegelschnitt gemeinsam, ebenso B_1 mit dem zu B'_2 entsprechenden Büschel B_2. Dem gemeinsamen Elemente von B_1 und B_2 entspricht das gemeinsame Element von B'_1 und B'_2; folglich gehen durch jeden Punkt $X \equiv Y'$ der Ebene E zwei einander entsprechende Kegelschnitte aus N und N'.

Auf der Verbindungsgerade der beiden Inversionscentren O, V' befinden sich zwei Involutionen verbundener Punkte, die eine zu Σ, die andere zu Σ' gehörig. Doppelpunkte sind die Schnittpunkte dieser Gerade mit Ω bezw. Φ'. Ein gemeinsames Paar beider Involutionen würde aus Punkten bestehen, die sowohl in $\mathfrak{T}_{1,1}$ als auch in $\mathfrak{T}'_{1,1}$ einander verbunden sind. Dieses Punktepaar ist reell, wenn wenigstens einer der Kegelschnitte Ω, Φ' die Gerade O V' in imaginären Punkten schneidet oder auch, wenn die beiden reellen Paare von Schnittpunkten hyperbolische Lage haben. Fallen zwei Punkte verschiedener Schnittpunktepaare zusammen, so dass sich also Ω und Φ' einmal auf O V' schneiden, so haben sich beide Punkte des gemeinsamen Paares in diesem Punkte vereinigt. Begegnen sich endlich Ω und Φ' auf O V' zweimal, in reellen oder imaginären Punkten, so sind beide Involutionen auf O V' identisch: es giebt eine ganze Involution

von Punktepaaren, deren Punkte in Σ und in Σ' einander verbunden sind.

25. Spezialisieren wir die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ dadurch, dass wir etwa die festen Punkte Q, R von Σ in die absoluten Punkte dieser Ebene fallen lassen, so besteht das festgelegte Kegelschnittgebüsch aus sämtlichen Kreisen der Ebene. Wählen wir drei beliebige d. h. nicht demselben Büschel angehörende Kreise als Constituenten des Netzes N, so wird (nach Steiner-Schroeter, a. a. O.) die gemeinsame Sehne aller dieser Kreise die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ als Verbindungsgerade der absoluten Punkte Q, R sein, Punkt O der Punkt gleicher Potenzen dieser drei und damit aller Kreise des Netzes N, während der Coincidenzkegelschnitt Ω derjenige Kreis um O als Mittelpunkt ist, welcher sämtliche Kreise von N rechtwinklig schneidet. Die Geradenpaare I. Art sind imaginär geworden, doch sind ihre Doppelpunkte reell; die Geradenpaare II. Art werden durch die Strahlen aus O und durch die unendlich ferne Gerade o gebildet. O und o sind inbezug auf Ω polar.

Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ induziert also in diesem Falle im Felde Σ eine Transformation durch reciproke Radien: verbunden sind zwei Punkte X, $\overline{X}$, die inbezug auf Ω konjugiert sind und mit O in gerader Linie liegen. Erzeugen wir in Σ' eine beliebige Gerade und ihren verbundenen Kegelschnitt wieder durch zwei zwei-zweideutig verwandte Büschel aus N′, welche einen sich selbst entsprechenden Kegelschnitt gemeinsam haben, so ergiebt sich in Σ die entsprechende Curve als Erzeugnis zweier zwei-zweideutig verwandten Kreisbüschel aus N, deren gemeinsamer Kreis sich selbst entspricht. Diese Curve besitzt, wenn wir das Ergebnis beim allgemeinen Falle auf den jetzt vorliegenden übertragen, in den absoluten Punkten Q, R Doppelpunkte, ist also eine bicirculäre Curve vierter Ordnung. Analoges gilt für die der Coincidenzcurve Φ' entsprechende Curve Φ. Es ist nicht schwer, auch die übrigen Ergebnisse auf diesen Fall anzuwenden oder aufs neue abzuleiten.

Mit diesen Andeutungen begnügen wir uns und geben zum Schlusse noch eine räumliche Konstruktion der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$, welche gestatten wird, durch eine Reihe einfacher Konstruktionen zu jedem Gebilde der einen Ebene sofort das entsprechende in der anderen Ebene zu finden.

§ 10. Räumliche Konstruktion der $\mathfrak{T}_{2,2}$.

26. Gegeben seien zwei Ebenen Σ, Σ', zwei Flächen zweiten Gerades F, F', auf jeder ein Punkt $\mathfrak{N}$ bezw. $\mathfrak{N}'$ und ein beliebiger Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume. Der Verlauf der Konstruktion ist dann folgender: aus $\mathfrak{N}$ wird Σ auf F projiciert, aus $\mathfrak{P}$ F auf F' und aus $\mathfrak{N}'$ F' auf Σ' bezw. umgekehrt aus $\mathfrak{N}'$ Σ' auf F', aus $\mathfrak{P}$ F' auf F, aus $\mathfrak{N}$ F auf Σ.

Geben wir in Σ einen Punkt X, so trifft $\mathfrak{N}$ X die Fläche F in $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{X}$ schneidet in F' zwei Punkte $\mathfrak{X}'$, $\overline{\mathfrak{X}}'$ ein, welche aus $\mathfrak{N}'$ in zwei Punkte X', $\overline{X}'$ von Σ' projiciert werden. Gehen wir von X' oder von $\overline{X}'$ aus, so liegen $\mathfrak{X}'$ und $\overline{\mathfrak{X}}'$ mit $\mathfrak{P}$ in einer Gerade, welche F ausser in $\mathfrak{X}$ noch in einem Punkte $\overline{\mathfrak{X}}$ schneidet; $\mathfrak{N}\,\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{X}}$ liefern die Punkte X, $\overline{X}$ in Σ. Es liegt also in der Tat eine zwei-zweideutige Punktverwandtschaft zwischen Σ und Σ' vor, und zwar auch von der besonderen Art, dass jedem der Punkte X', $\overline{X}'$, die einem Punkte X von Σ entsprechen, ausser X ein und derselbe Punkt X entspricht. Auch der symmetrische Charakter der Verwandtschaft inbezug auf Σ und Σ' geht deutlich aus ihrer Konstruktion hervor.

Um zwei entsprechende Punktepaare zu erhalten, schneidet man einen beliebigen Strahl durch $\mathfrak{P}$ mit F und F' und projiciert die Schnittpunkte aus $\mathfrak{N}$ bez. $\mathfrak{N}'$ in Σ bezw. Σ'. Hieraus erhellt, dass zwei Punkte der Art $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ auf F oder $\mathfrak{X}'$, $\overline{\mathfrak{X}}'$ auf F' einander involutorisch zugeordnet sind; dasselbe gilt also für ihre Projektionen X, $\overline{X}$ bezw. X', $\overline{X}'$.

Die involutorische Verwandtschaft zwischen den Punkten $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ auf F gehört einer räumlichen involutorischen Homologie an, welche $\mathfrak{P}$ als Centrum und dessen Polarebene inbezug auf F als Ebene der Homologie besitzt. In dieser Homologie

entspricht die Fläche F als ganze sich selbst. Analoges gilt für F′ und die Verwandtschaft auf ihr.

Damit zwei Punkte eines Paares X, $\overline{X}$ in Σ zusammenfallen, müssen die Punkte auf F: $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ sich vereinigen, also den Berührungspunkt einer Tangente aus $\mathfrak{P}$ an F bilden. Der Ort der Berührungspunkte aller Tangenten aus $\mathfrak{P}$ an F ist die Berührungscurve des Tangentialkegels aus $\mathfrak{P}$, ein Kegelschnitt; er wird aus $\mathfrak{N}$ in einen Kegelschnitt Ω von Σ projiciert, welcher nach der Konstruktion alle Punkte der Art $X \equiv \overline{X}$ enthält.

Jede der beiden durch $\mathfrak{N}$ gehenden Geraden von F wird aus N in ihren Spurpunkt in Σ projiciert; diese Spurpunkte seien Q, R, ihre Verbindungsgerade, die Spur der Tangentialebene in $\mathfrak{N}$ an F, o. Jede auf F verlaufende Curve, welche die beiden Geraden $\mathfrak{N}$ Q, $\mathfrak{N}$ R schneidet, wird aus N in eine Curve von Σ projiciert, welche durch die Punkte Q, R geht. Umgekehrt werden Q und R je in die ganze Gerade $\mathfrak{N}$ Q bezw. $\mathfrak{N}$ R aus $\mathfrak{N}$ auf F projiciert. Ein fester Punkt in Σ ist ferner der Spurpunkt O der Gerade $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{N}$. Projicieren wir die Schnittpunkte dieser Gerade mit F: $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{N}$ in Σ, so wird $\mathfrak{N}$ selbst aus $\mathfrak{N}$ durch jeden Strahl durch $\mathfrak{N}$ in der Tangentialebene $\mathfrak{N}$ Q R projiciert, also in jeden Punkt von o, ferner Punkt $\mathfrak{D}$ in O. O und jeder Punkt von o bilden ein Paar verbundener Punkte. $\mathfrak{N}$ O $\mathfrak{P}$ schneidet F′ in zwei Punkten $\mathfrak{D}'$, $\overline{\mathfrak{D}}'$, die, aus $\mathfrak{N}'$ projiciert, zwei Punkte O′, $\overline{O}'$ von Σ' liefern. Umgekehrt entspricht jedem dieser Punkte der Punkt O und die Gerade o.

Den Elementen Ω, Q, R, o, O von Σ analog definierte Elemente ergeben sich in Σ': Φ', T′, U′, v′, V′; dem Punkte V′ entsprechen in Σ Punkte V, $\overline{V}$.

27. Nach der vorhin ausgeführten Konstruktion liegen die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{N}$, X, $\overline{X}$ in einer und derselben Ebene, ebenso die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X}'$, $\overline{\mathfrak{X}}'$, $\mathfrak{N}'$, X′, $\overline{X}'$; die gemeinsame Gerade beider Ebenen trägt die Punkte $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X}'$, $\overline{\mathfrak{X}}'$. Die erste dieser Ebenen enthält die Gerade $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{N}$, die zweite die Gerade $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{N}'$; folglich liegen X, $\overline{X}$ mit O, X′ $\overline{X}'$ mit V′ in gerader Linie. Dasselbe gilt für alle Paare verbundener

Punkte in Σ bezw. Σ'. Da, wie schon erwähnt, die Punkte X, $\overline{X}$ einander involutorisch und ein-eindeutig zugeordnet sind, bilden alle auf demselben Strahle durch O befindlichen Punktepaare X, $\overline{X}$ eine Involution, deren zwei Doppelpunkte die Schnitte dieses Strahles mit Ω sein müssen. Zu diesen beiden Schnittpunkten liegen also je zwei Punkte X, $\overline{X}$ auf dem genannten Strahle harmonisch; X und $\overline{X}$ sind also inbezug auf Ω konjugiert. Da zu O jeder Punkt von o verbunden oder, wie wir jetzt sagen können, konjugiert ist, so ist O der Pol von o inbezug auf Ω. Analoges gilt für das Feld Σ'. Hiermit ist erkannt, dass die durch die jetzt konstruierte $\mathfrak{T}_{2,2}$ in Σ und Σ' inducierten verbundenen Verwandtschaften Hirstsche quadratische Inversionen sind, mit Ω bezw. Φ' als Basis und den Punkten O und V' als Centren.

In jeder derselben giebt es ein Netz von sich selbst verbundenen Kegelschnitten, N in Σ, N' in Σ'; wir haben zu zeigen, dass diese Netze durch unsere Konstruktion collinear aufeinander bezogen sind. Ein Kegelschnitt K von N in Σ wird aus $\mathfrak{N}$ durch einen Kegel zweiten Grades projiciert, welcher F in einer Raumcurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt in $\mathfrak{N}$ schneidet. Da aber K durch Q und R geht, gehören jener Curve die Geraden $\mathfrak{N}$ Q, $\mathfrak{N}$ R an; als eigentliches Bild des Kegelschnittes K auf F bleibt ein Kegelschnitt, der, weil K sich selbst verbunden ist, zu jedem Punkte $\mathfrak{X}$ auch den zugehörigen $\overline{\mathfrak{X}}$ enthält. Nun sind aber zwei Punkte $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ stets mit P allineiert, folglich geht die Ebene dieses Kegelschnittes auf F durch $\mathfrak{P}$, schneidet weiter F' in einem Kegelschnitte; dieser wird aus $\mathfrak{N}'$, weil er den Geraden $\mathfrak{N}'$ T' und $\mathfrak{N}'$ U' begegnet, in einen Kegelschnitt von Σ' projiciert, der durch T' und U' geht und sich selbst verbunden ist, also dem Netze N' von Σ' angehört. Wir sehen, jedem Kegelschnitte von N entspricht ein-eindeutig ein solcher von N'. — Aus den Eigenschaften der Inversionen in Σ und Σ' folgt, dass jedes Punktepaar X, $\overline{X}$ bezw. X', $\overline{X}'$ das Paar veränderlicher Grundpunkte eines bestimmten Büschels aus dem Netze N bezw. N' ist. Indem unsere Konstruktion die

Punktepaare X, $\overline{X}$ von Σ ein-eindeutig auf die Punktepaare X′, $\overline{X}'$ von Σ' bezieht, ordnet sie also auch jedem Büschel von N einen Büschel von N′ zu, und umgekehrt. Entsprechende Kegelschnitte bewegen sich gleichzeitig linear: die Netze N, N′ sind durch unsere Konstruktion collinear gemacht.

Aus dem Gesagten ziehen wir noch folgenden Schluss: während wir, um sämtliche einander entsprechenden Punktepaare zu erhalten, die Flächen F, F′ mit dem Strahlenbündel um $\mathfrak{P}$ schneiden müssen, worauf die beiden Schnittpunktepaare jedes Strahles mit F und F′ aus $\mathfrak{N}$ bezw. $\mathfrak{N}'$ in Σ bezw. Σ' zu projicieren sind, müssen wir, um sämtliche Paare entsprechender Kegelschnitte der Netze N und N′ zu bekommen, die Flächen F, F′ mit dem Ebenenbündel um $\mathfrak{P}$ zum Schnitte bringen und die von jeder Ebene eingeschnittenen Kegelschnitte aus $\mathfrak{N}$ bezw. $\mathfrak{N}'$ nach Σ bezw. Σ' projicieren.

28. Die Geradenpaare II. Art werden durch den Ebenenbüschel um O $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ projiciert; dieser Büschel schneidet in F′ Kegelschnitte mit den gemeinsamen Punkten $\mathfrak{D}'$, $\overline{\mathfrak{D}}'$ ein, welche aus $\mathfrak{N}'$ in den Kegelschnittbüschel (T′, U′, O′, $\overline{O}'$) von Σ' projiciert werden. Der Ebenenbüschel um O $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ hat ferner mit dem Büschel um die Gerade V′ $\mathfrak{N}'$ $\mathfrak{P}$ eine Ebene gemeinsam; diese enthält die Punkte O, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}'$, V′, ausserdem, weil sie die Gerade O $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ und Punkt $\mathfrak{N}'$ bezw. die Gerade V′ $\mathfrak{N}'$ $\mathfrak{P}$ und den Punkt $\mathfrak{N}$ enthält, auch die Punkte O′, $\overline{O}'$ bezw. V, $\overline{V}$. Wir sehen noch einmal, dass es in jeder Ebene ein und nur ein Geradenpaar II. Art giebt, dem wieder ein solches entspricht, dass beide einander entsprechen und dass sie aus den Geraden o und O V $\overline{V}$ bezw. v′ und O′ $\overline{O}'$ V′ bestehen (§ 6, 11 Ende).

Man sieht ferner leicht ein, dass zu den Geradenpaaren I. Art von Σ (Σ') solche Ebenen aus $\mathfrak{P}$ führen, welche F (F′) in zwei Geraden schneiden, also Tangentialebenen aus $\mathfrak{P}$ an F (F′) sind. Da die beiden Tangentialkegel aus $\mathfrak{P}$ an F und F′, beide zweiten Grades, vier gemeinsame Ebenen besitzen, so giebt es — eine Bestätigung des in § 6, 11 Ende erhaltenen Ergebnisses — in jedem Felde

vier Geradenpaare I. Art, denen wieder solche im anderen entsprechen, und diese zweimal vier Geradenpaare I. Art entsprechen einander. Da endlich jeder der Ebenenbüschel um O $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ und V′ $\mathfrak{N}'$ $\mathfrak{P}$ an die Fläche F′ bezw. F zwei Berührungsebenen sendet, so ergiebt sich aufs neue, dass in jedem der beiden Felder Σ, Σ' zwei Geradenpaare II. Art existieren, denen Geradenpaare I. Art im anderen korrespondieren, und umgekehrt (§ 6, 11 Ende).

Eine Gerade g in Σ wird aus $\mathfrak{N}$ in einen ebenen Schnitt von F durch $\mathfrak{N}$ projiciert; der Kegel zweiten Grades aus $\mathfrak{P}$ nach ihm schneidet F′ in einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art, welche also jeder Gerade auf F′, mithin auch den Geraden $\mathfrak{N}'$ T′, $\mathfrak{N}'$ U′ zweimal begegnet. Da jenem Kegel die Gerade $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ angehört, enthält die erwähnte Curve auf F′ auch die Punkte O′, $\overline{\text{O}}'$. Sie wird also aus $\mathfrak{N}'$ nach Σ' in eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in T′, U′ und einfachen Punkten in O′, $\overline{\text{O}}'$ projiciert (§ 4, 8 Ende).

29. Liegen zwei Punkte X, Y in Σ einander unendlich nahe, $\text{X} \infty \text{Y}$, und denken wir sie uns durch eine Gerade g verbunden, so sind ihre Bildpunkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ auf F auf dem Schnitte $\mathfrak{K}_g$ dieser Fläche mit der Ebene $[\mathfrak{N}, g]$ einander unendlich benachbart. Sie werden aus $\mathfrak{P}$ durch zwei Nachbarkanten des Kegels zweiten Grades $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}_g)$ projiciert, von denen jede die Fläche F′ in dem Punktepaare $\mathfrak{X}'$, $\overline{\mathfrak{X}}'$ bezw. $\mathfrak{Y}'$, $\overline{\mathfrak{Y}}'$ schneidet. Weil aber die Kanten einander benachbart sind, ist etwa $\mathfrak{X}' \infty \mathfrak{Y}'$, $\overline{\mathfrak{X}}' \infty \overline{\mathfrak{Y}}'$ auf der Schnittcurve vierter Ordnung unseres Kegels mit F′; diese Punkte werden aus $\mathfrak{N}'$ in zwei einander benachbarte Paare verbundener Punkte von Σ' projiciert, so dass $\text{X}' \infty \text{Y}'$, $\overline{\text{X}}' \infty \overline{\text{Y}}'$ wird. — Geht man umgekehrt etwa von $\text{X}' \infty \text{Y}'$ in Σ' aus, so ergiebt sich, dass nicht nur $\text{X} \infty \text{Y}$, sondern auch $\overline{\text{X}} \infty \overline{\text{Y}}$ ist (§ 3, 4).

Nach Nr. 26 dieses § ist das Bild von Ω auf F der Berührungskegelschnitt des Tangentialkegels aus $\mathfrak{P}$ an F. Die Schnittcurve vierter Ordnung erster Art dieses Kegels mit F′ wird aus $\mathfrak{N}'$ in das Feld Σ' als eine ebene Curve vierter Ordnung Ω' mit Doppelpunkten in T′, U′ projiciert;

diese Curve Ω' geht aber nicht durch O', $\bar{O}'$, weil der Strahl $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,O$ im allgemeinen nicht der Kantenreihe des Tangentialkegels aus $\mathfrak{P}$ an F angehört (§ 7, 14). Analog erhalten wir Φ aus Φ'.

Stellen wir uns Ω wieder doppelt vor (§ 7, 13), als $\Omega \infty \bar{\Omega}$, und ist X ein beliebiger Punkt auf Ω, so liegt sein verbundener $\bar{X}$ auf der Gerade X O und $\bar{\Omega}$, dem X unendlich benachbart. Nach No. 28 befinden sich die Strahlen $\mathfrak{R}\,X$, $\mathfrak{R}\,\bar{X}$, mithin auch die Bildpunkte $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ in der Ebene aus dem Büschel um $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,O$ nach O X; diese Ebene enthält also auch die Gerade $\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}$ d. h. die Tangente aus $\mathfrak{P}$ an F in $\mathfrak{x}$. Analoges gilt für alle Ebenen durch $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,O$. Der doppelt vorgestellten Coincidenzcurve $\Omega \infty \bar{\Omega}$ entspricht auf der Fläche F ein doppelt zu denkender Kegelschnitt; von den letzteren beiden einander unendlich benachbarten Kegelschnitten wird der eine durch die Berührungspunkte sämtlicher Tangenten aus $\mathfrak{P}$ an F gebildet, der andere durch deren Nachbarpunkte auf den zugehörigen Tangenten. Die genannten beiden Kegelschnitte liegen also auf einem und demselben Kegel zweiten Grades, dem Tangentialkegel aus $\mathfrak{P}$ an F.

Nehmen wir nun auf $\bar{\Omega}$ einen Nachbarpunkt $\bar{Y}$ von X, der dem X nicht verbunden ist, so befinden sich die Projektionsstrahlen $\mathfrak{R}\,X$, $\mathfrak{R}\,\bar{Y}$ nicht in derselben, sondern in zwei verschiedenen, einander unendlich benachbarten Ebenen des Büschels um $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,O$, liefern mithin zwei verschiedene, wenn auch unendlich benachbarte Tangenten aus $\mathfrak{P}$ an F mit den Berührungspunkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ (oder auch $\mathfrak{y}$). Diese Nachbarkanten auf dem Tangentialkegel aus $\mathfrak{P}$ an F schneiden F' in zwei benachbarten Punktepaaren, die durch Projection aus $\mathfrak{R}'$ in zwei benachbarte Paare verbundener Punkte auf Ω' in Σ' übergehen, so dass etwa $X' \infty Y'$, $\bar{X}' \infty \bar{Y}'$ ist.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsachen ist es leicht, alle Berührungseigenschaften von Ω' resp. Φ, welche in § 8 besprochen sind, zu bestätigen. Wir beschränken uns darauf, noch einmal nachzuweisen, dass jede Curve C', die einer

Gerade g von Σ entspricht, die Grenzcurve Ω' viermal, und zwar an zweimal zwei einander verbundenen Stellen einfach berührt (§ 8, 15). Die Gerade g schneide $\Omega \infty \bar{\Omega}$ in Punkten $X \infty \bar{Z}$, $Y \infty \bar{W}$. Jede der beiden Schnittstellen führt nach dem Vorigen zu zwei Nachbarkanten, $\mathfrak{P}\,\mathfrak{x} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{z}}$ resp. $\mathfrak{P}\,\mathfrak{y} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{W}}$, auf dem Tangentialkegel aus $\mathfrak{P}$ an F, also zu zweimal zwei benachbarten Paaren verbundener Punkte $\mathfrak{x}' \infty \mathfrak{z}'$, $\bar{\mathfrak{x}}' \infty \bar{\mathfrak{z}}'$ und $\mathfrak{y}' \infty \mathfrak{W}'$, $\bar{\mathfrak{y}}' \infty \bar{\mathfrak{W}}'$ auf dessen Schnittcurve vierter Ordnung mit F'. Da ferner die Punkte X, $\bar{Z}$, Y, $\bar{W}$ auf g liegen, befinden sich ihre Bildpunkte $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{W}$ auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_g$, dem Schnitte von F mit der Ebene $[\mathfrak{N}, g]$. Der Kegel zweiten Grades $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}_g)$ enthält ebenfalls die Kanten $\mathfrak{P}\,\mathfrak{x} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{P}\,\mathfrak{y} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{W}}$, hat also mit dem Tangentialkegel aus $\mathfrak{P}$ an F doppelten Contact: längs $\mathfrak{P}\,\mathfrak{x} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{z}}$ und $\mathfrak{P}\,\mathfrak{y} \infty \mathfrak{P}\,\bar{\mathfrak{W}}$. Die Schnittcurve vierter Ordnung des Kegels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}_g)$ mit F' enthält auch die erwähnten zweimal zwei benachbarten Paare verbundener Punkte auf F': die beiden konstruierten Raumcurven vierter Ordnung auf F' berühren sich viermal, und zwar an zweimal zwei einander verbundenen Stellen. Hieran wird durch die Projection aus $\mathfrak{N}'$ in Σ', bei der diese Curven in Ω' und C' übergehen, nichts geändert.

30. Eine letzte Anwendung dieser räumlichen Konstruktion diene zur Bestätigung der Charakteristiken 4, 16, 64 des Systems der Curven C' in Σ' (§ 8, 19).

Wie viele Curven C' gehen durch zwei beliebig gegebene Punkte X', Y' in Σ'? Projicieren wir X', Y' aus $\mathfrak{N}'$ auf F' und von dort aus $\mathfrak{P}$ auf F, so erhalten wir zwei Paare verbundener Punkte: $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$. Um zu erfahren, wie viele Geraden g in Σ aus jedem der beiden entsprechenden Punktepaare X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$ wenigstens einen Punkt enthalten, müssen wir sehen, wieviel ebene Schnitte (Bildcurven der Geraden g in Σ) durch $\mathfrak{N}$ aus jedem der genannten beiden Punktepaare auf F mindestens einen Punkt enthalten. Solcher Ebenen gibt es vier: $(\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{N}\,\bar{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{y}})$, $(\mathfrak{N}\,\bar{\mathfrak{x}}\,\bar{\mathfrak{y}})$. Projicieren wir diese vier ebenen Schnitte aus $\mathfrak{P}$ auf F' und von hier aus $\mathfrak{N}'$ in Σ', so er-

halten wir vier und nur vier Curven C', welche gleichzeitig durch X' und Y' gehen. Die erste Charakteristik ist 4.

Wieviel Curven C' gehen durch einen beliebig gegebenen Punkt X' und berühren eine gegebene Gerade l' in Σ'? Vermöge der räumlichen Konstruktion entspricht den Elementen X' und l' auf F ein Punktepaar $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ resp. eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art R^4_1. Es kommt darauf an zu erfahren, wieviel ebene Schnitte (Bilder von Geraden g in Σ) durch einen der Punkte des Paares gehen und gleichzeitig R^4_1 berühren. Die Ebenen dieser Schnitte gehören den Büscheln um die Geraden $\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{N}\,\bar{\mathfrak{x}}$ an; da diese nicht auf F liegen, also R^4_1 nicht schneiden, ergeben sich infolge des Ranges 8 der Curve R^4_1 in jedem Büschel acht Ebenen und in ihnen Schnitte durch $\mathfrak{N}$ (Bilder von Geraden g in Σ), welche durch einen der Punkte $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ gehen und R^4_1 berühren. Durch Projektion dieser 16 ebenen Schnitte aus $\mathfrak{P}$ auf F' und von hier aus $\mathfrak{N}'$ in Σ' erhalten wir 16 Curven C', welche l' berühren und durch X' gehen. Die zweite Charakteristik ist 16.

Wie viele Curven C' berühren zwei gegebene Geraden, l'_1, l'_2 in Σ'? Die diesen Geraden entsprechenden Raumcurven 4. Ordnung I. Art R^4_1, R^4_2 auf F haben keinen Punkt gemeinsam und gehen nicht durch $\mathfrak{N}$. Sie werden aus $\mathfrak{N}$ als zwei Curven C in Σ projiciert, deren gemeinsame Tangenten gesucht werden. Letztere werden in Σ eingeschnitten durch die 64 Ebenen, welche die unsere R^4_1 und R^4_2 aus $\mathfrak{N}$ projicierenden Kegel vierter Ordnung und, weil je mit zwei Doppelkanten behaftet, achter Klasse (wegen des Ranges 8 der Curven) gemeinsam haben. Diese 64 ebenen Schnitte von F, welche durch $\mathfrak{N}$ gehen und beide Curven R^4_1, R^4_2 berühren, gehen durch die Projektionen in 64 Curven C' von Σ' über, welche l'_1 und l'_2 gleichzeitig berühren. Die dritte Charakteristik ist 64.

Wir sind also durch unsere Konstruktion in der Tat zu der in den vorangehenden Paragraphen beschriebenen Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ gelangt. Diese räumliche Konstruktion kann dazu dienen, die erhaltenen Ergebnisse teils zu bestätigen teils durch neue zu ergänzen.

Nachdem wir mit der räumlichen Konstruktion der $\mathfrak{T}_{2,2}$ bereits die Betrachtung allein ebener Figuren verlassen haben, kommen wir jetzt zu dem zweiten Teile unserer Aufgabe, zur Untersuchung einer analog definierten zwei-zweideutigen Verwandtschaft im Raume.

B. Die zwei-zweideutige Verwandtschaft im Raume.

§ 1. Aufgabe.

31. Wir stellen uns den Raum doppelt vor, als Σ und Σ', und geben beliebig in Σ sechs feste Punkte $A_1, \ldots, A_6$, in Σ' sechs andere feste Punkte $B'_1, \ldots, B'_6$. Durch diese Punkte wird in jedem Raume eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen zweiten Grades festgelegt, ein Gebüsch: G in Σ, G′ in Σ'. Zwischen G und G′ stellen wir eine beliebige Collineation her. Jeder Fläche F von G in Σ entspricht dann eindeutig eine Fläche F′ von G′ in Σ', und umgekehrt. Jedem Büschel von G entspricht ein Büschel von G′, und umgekehrt; entsprechende Flächen bewegen sich also gleichzeitig linear d. h. beschreiben gleichzeitig Büschel. Jedem Netze von G entspricht ein Netz von G′, und umgekehrt.

Weil die Collineation zwischen G und G′ beliebig gewählt wurde, entsprechen den ∞^2 in G enthaltenen Kegeln zweiten Grades nicht die ∞^2 Kegel von G′, sondern in der Regel allgemeine Flächen von G′, und umgekehrt auch den Kegeln von G′ in der Regel allgemeine Flächen von G. Insbesondere werden also auch den zehn Ebenenpaaren des einen allgemeine Flächen des andern Gebüsches entsprechen.

Ein beliebiger Punkt X von Σ scheidet aus G ein Netz N von Flächen zweiten Grades aus, die ausser den sechs festen Punkten A_i und X noch einen achten associierten Punkt $\bar{X}$ gemeinsam haben. Dem Netze N entspricht ein Netz N′ von G′, dessen Flächen ausser den sechs festen

Punkten B'_i noch zwei veränderliche gemeinsame Punkte besitzen; hat doch jedes Netz eines beliebigen Flächengebüsches n. Ordnung n^3 Grundpunkte. Die beiden veränderlichen Grundpunkte ordnen wir dem Punktepaare $X, \overline{X}$ in Σ als entsprechend zu und bezeichnen sie mit $X', \overline{X}'$. Umgekehrt entspricht dem Punkte X', und ebenso dem gleichartig definierten Punkte $\overline{X}'$, das Punktepaar $X, \overline{X}$ in Σ, als das Paar der veränderlichen Grundpunkte des dem N' entsprechenden Netzes N. Auf diese Weise ist zwischen den Punkten der Räume Σ, Σ' eine zwei-zweideutige Verwandtschaft hergestellt, die wir im folgenden näher untersuchen wollen. Sie stellt sich als eine Verallgemeinerung einer gewöhnlichen räumlichen Punktkollineation dar; denn statt zwei Ebenenräume collinear aufeinander zu beziehen und damit zugleich eine collineare Beziehung der Punkträume (zwei entsprechende Punkte als Scheitel entsprechender Ebenenbündel) herzustellen, ordnen wir hier die veränderlichen Grundpunktepaare entsprechender Netze aus den collinear gemachten Gebüschen G, G' einander zu.

Wie beim ebenen Problem haben wir auch hier zu bemerken, dass unsere zwei-zweideutige Verwandtschaft, die wir wieder mit $\mathfrak{T}_{2,2}$ bezeichnen, insofern speziell ist, als die beiden Punkte des einen Raumes, welche einem Punkte des anderen entsprechen, auch demselben zweiten Punkte des anderen Raumes korrespondieren. Dies wird bei einer allgemeinen zwei-zweideutigen Verwandtschaft im Raume nicht der Fall sein.

Bestimmen wir die Mannigfaltigkeit unserer Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$. Die zweimal sechs Grundpunkte A_i und B'_i lassen sich auf je ∞^3, alle zusammen auf ∞^{36} Weisen wählen; die Gebüsche sind dann bestimmt, da die Punkte bereits ihren resp. Räumen zugeteilt sind. Die Collineation zwischen den Gebüschen G, G' lässt sich unter ∞^{15} auswählen. Wir erhalten also ∞^{51} als Mannigfaltigkeit der $\mathfrak{T}_{2,2}$.

§ 2. Die verbundene Verwandtschaft.

32. Jeder Punkt X in Σ bestimmt einen Punkt desselben Raumes, den achten associierten $\overline{X}$ zu $A_1, \ldots A_6$

und X. Somit ergiebt sich im Raume Σ selbst eine Punktkorrespondenz, die nicht nur eindeutig ist, weil es zu sieben Punkten des Raumes im allgemeinen nur einen achten associierten Punkt giebt, sondern auch involutorischen Charakter hat, weil X und $\bar{X}$ gleichartig definiert sind und durch dieselbe Construction, Festlegung ein und desselben Netzes aus G, auseinander hervorgehen; es ist also irrelevant, welchen dieser Punkte man als X und welchen man als $\bar{X}$ bezeichnet. X, $\bar{X}$ mögen wieder verbundene Punkte heissen und die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ zwischen ihnen die unserer $\mathfrak{T}_{2,2}$ verbundene Verwandtschaft in Σ. Demgemäss sollen auch in dieser Verwandtschaft sich entsprechende Elemente (Punkte, Curven, Flächen) verbundene genannt werden. Eine analoge Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_{1,1}$ besteht im Raume Σ' zwischen den Punkten X', $\bar{X}'$.

Aus der Definition dieser verbundenen Verwandtschaften geht unmittelbar hervor, dass jede von ihnen eine räumliche Geisersche Verwandtschaft ist (vergl. Einleitung). Zur Orientierung seien die wichtigsten Eigenschaften einer solchen Verwandtschaft hier vermerkt. Sämtliche Flächen des Gebüsches sind (als ganze Flächen) sich selbst verbunden. Zwei verbundene Punkte liegen auf einer und derselben Doppelsecante der durch die sechs festen Grundpunkte A_i (B'_i) bestimmten cubischen Raumcurve r_3 (s_3') und beschreiben auf ihr eine Involution verbundener Punkte. Hieraus folgt, dass eine beliebige Gerade des Raumes kein Paar verbundener Punkte enthält, und weiter, dass, auch wenn zwei verbundene Punkte sich vereinigen, ihre Verbindungsgerade als einzige Doppelsecante aus dem Coincidenzpunkte an r_3 (s_3') immer bestimmt ist. Im Gebüsche existieren 16 ausgezeichnete Netze, deren Flächen nicht nur eine endliche Anzahl von Grundpunkten, sondern eine ganze Curve gemeinsam haben; die Grundcurven dieser Netze sind r_3 (s_3') und die 15 Verbindungsgeraden p_{ik} (q'_{ik}) der sechs Grundpunkte A_i (B'_i) zu je zweien. Jedem Punkte auf einer dieser Curven ist jeder Punkt derselben Curve verbunden. Diese Curven sind also für $\mathfrak{T}_{1,1}$ ($\mathfrak{T}'_{1,1}$) Hauptcurven, aber von besonderer Art, in-

dem eben die den Punkten dieser Curven entsprechenden Curven nicht eine Fläche beschreiben, sondern fest bleiben und mit der Hauptcurve selbst zusammenfallen; nach Prof. R. Sturms Vorschlag mögen Hauptcurven dieser Art als ausserordentliche Hauptcurven bezeichnet werden, im Gegensatz zu den ordentlichen Hauptcurven, denen Hauptflächen entsprechen. Hauptpunkte von $\mathfrak{T}_{1,1}$ ($\mathfrak{T}'_{1,1}$) sind die Grundpunkte A_i (B'_i); jedem sind sämtliche Punkte des Kegels aus G (G′) verbunden, welcher in dem Grundpunkte seine Spitze hat. Diese Hauptkegel seien mit a_i (b'_i) bezeichnet. Ort der Coincidenzpunkte ist die Kegelspitzenfläche (Jacobiche Fläche) vierter Ordnung Ω (Φ') des Gebüsches; sie enthält sämtliche Doppelpunkte der Flächen des Gebüsches, die Curve r_3 (s_3'), die 15 Geraden p_{ik} (q'_{ik}) und die Doppelgeraden der zehn Ebenenpaare von G (G′) je einfach sowie die sechs Grundpunkte A_i (B'_i) je doppelt; in jedem Punkte A_i (B'_i) ist der zugehörige Hauptkegel a_i (b'_i) Anschmiegungskegel an Ω (Φ'). — Einer beliebigen Gerade des Raumes ist eine Raumcurve siebenter Ordnung vom Geschlechte Null verbunden, welche in den sechs Grundpunkten A_i (B'_i) ihres Raumes Doppelpunkte besitzt und jener Gerade viermal begegnet. Geht die Gerade durch einen der Grundpunkte, so erniedrigt sich die Ordnung der entsprechenden Curve um vier; es bleibt eine cubische Raumcurve durch die fünf übrigen Grundpunkte, welche die Gerade zweimal trifft. Die Büschelgrundcurven R^4 von G sind als ganze Curven sich selbst verbunden, tragen also Involutionen verbundener Punkte, von denen jedes Paar auf einer Doppelsecante der r_3 liegt. Auf der gemeinsamen Fläche jedes Büschels (R^4) mit dem Netze (r_3) befindet sich eine Regelschar gemeinsamer Doppelsecanten von R^4 und r_3, welche aus den Geraden der anderen Regelschar auf derselben Fläche, ebenfalls Doppelsecanten von R^4, aber einfachen Sekanten von r_3, durch projektive Ebenenbüschel projiciert werden. Die Involution versundener Punkte auf jeder R^4 von G wird also aus ∞^1 Doppelsecanten der R^4 als Axen durch Ebenenbüschel projiciert, von denen jede Ebene ein Paar ausscheidet; hiernach

wird diese Involution als axiale Involution bezeichnet. — Den Ebenen des Raumes ist ein Gebüsch von Flächen siebenter Ordnung verbunden; jede seiner Flächen enthält die sechs festen Grundpunkte A_i (B'_i) vierfach, die Curve r_3 (s_3') dreifach, jede der 15 Geraden p_{ik} (q'_{ik}) einfach. Einer Ebene durch einen Grundpunkt ist eine Fläche fünfter Ordnung verbunden, die ihn zum Doppelpunkte, die fünf übrigen festen Grundpunkte zu dreifachen Punkten hat, r_3 (s_3') doppelt, jede der zehn nicht durch den beträchteten Grundpunkt gehenden Geraden p_{ik} (q'_{ik}) einfach, die übrigen fünf nicht mehr enthält. So hat sich der dem betreffenden Grundpunkte verbundene Hauptkegel einmal abgelöst.

§ 3. Allgemeine Eigenschaften der $\mathfrak{T}_{2,2}$.

33. Jeder der beiden Räume Σ, Σ' ist ein doppelter Raum; denn ein Paar verbundener Punkte eines Raumes kommt immer dann zustande, wenn ein Punkt, der den anderen Raum durchläuft, in einen der Punkte des entsprechenden Paares fällt.

Der Punktreihe auf einer beliebigen Curve des einen Raumes entspricht eine ein-eindeutige involutorische Punktkorrespondenz auf der korrespondierenden Curve im anderen Raume. Wir bezeichnen diese Korrespondenz verbundener Punkte wieder als eine Involution, berücksichtigen aber, dass sie eventuell auf nicht unicursalem Träger liegt. Umgekehrt entspricht der letztgenannten Curve im ersten Raume ausser der gegebenen Curve noch deren verbundene.

Einer beliebigen Fläche des einen Raumes entspricht im anderen eine von den Paaren verbundener Punkte, welche den Punkten jener Fläche entsprechen, überdeckte Fläche; umgekehrt korrespondiert dieser letzteren jene gegebene Fläche und ihre verbundene.

Alle Curven und Flächen eines Raumes, welche beliebigen Curven und Flächen des anderen entsprechen, ebenso beliebige Curven und Flächen samt ihren verbundenen Gebilden sind als ganze sich selbst verbunden. *Aus jedem beliebigen Punkte*

einer solchen Curve oder Fläche geht also an die Curve r_3 (s_3') eine Doppelsecante, welche die Gesamt-Curve oder -Fläche auch in dem verbundenen Punkte schneidet. Folglich bestimmt jede der genannten Curven eine Regelfläche aus der Congruenz (1,3) der Doppelsecanten von r_3 (s_3'), welche die genannte Curve ganz enthält und welche sich selbst verbunden ist, da jede ihrer Erzeugenden als Doppelsecante von r_3 (s_3') es ist.

In Coincidenzpunkten der Art $X \equiv \overline{X}$ ($X' \equiv \overline{X}'$) auf sich selbst verbundenen Curven oder Flächen berührt eine Doppelsecante der r_3 (s_3') die betreffende Curve oder Fläche.

Paaren verbundener Punkte auf einer Curve oder Fläche des einen Raumes korrespondieren Paare verbundener Doppelpunkte auf der entsprechenden Curve oder Fläche, sich selbst verbundenen Curven auf einer Fläche doppelt zählende Curven auf der entsprechenden Fläche. Umgekehrt können veränderliche Doppelpunkte auf der entsprechenden Curve nur durch veränderliche Paare verbundener Punkte oder durch Doppelpunkte auf der gegebenen Curve entstehen. Hieraus folgt, dass die einer beliebigen Gerade entsprechenden Curve keinen veränderlichen Doppelpunkt besitzt.

Ist eine Curve oder Fläche sich selbst verbunden, so wird die entsprechende Curve oder Fläche doppelt erzeugt, wenn ein Punkt die gegebene Curve oder Fläche beschreibt. Das entsprechende Gebilde zählt also doppelt.

Zwei einander unendlich benachbarten Punkten eines Raumes, etwa $X_1 \infty X_2$ in Σ, sind infolge der Stetigkeit zwei ebenfalls einander unendlich benachbarte Punkte $\overline{X}_1 \infty \overline{X}_2$ verbunden und im anderen Raume zwei einander unendlich naheliegende Punktepaare X'_1, $\overline{X}'_1$ und X'_2, $\overline{X}'_2$ entsprechend, so dass etwa $X'_1 \infty X'_2$, $\overline{X}'_1 \infty \overline{X}'_2$ ist.

Wie die behandelte ebene Verwandtschaft, so ist auch diese räumliche $\mathfrak{T}_{2,2}$ inbezug auf Σ und Σ' völlig gleichartig definiert; folglich wird auch hier nur eine Gradzahl auftreten d. h. die Ordnungen der Curven (Flächen) jedes Raumes, die den Geraden (Ebenen) des anderen entsprechen, sind

beidemal gleich. Diese Zahl bezeichnen wir als den Grad n der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$.

Während sich diese Gleichheit der Ordnungszahlen bei der Erzeugung der einer Gerade entsprechenden Curve im folgenden Paragraphen bestätigt, zeigen wir jetzt noch, dass z. B. die Curve f′, welche einer Gerade g von Σ entspricht, gleicher Ordnung ist wie die Fläche φ, die einer Ebene α′ von Σ′ korrespondiert. Ist n die Ordnung von f′, so begegnet sie der Ebene α′ in n Punkten, unter denen sich im allgemeinen d. h. wenn f′ nicht gerade eine der drei in α′ befindlichen Doppelsecanten von s_3' trifft, keine zwei verbundenen Punkte befinden. Die entsprechenden n Paare verbundener Punkte haben ihre einen n Punkte auf g, die n verbundenen Punkte auf der zu g verbundenen Curve; ausserdem befinden sich sämtliche n Paare auf der zu α′ entsprechenden Fläche φ. Letztere begegnet der beliebigen Gerade g von Σ in n Punkten, ist also n-ter Ordnung wie f′. Ebenso sind die Ordnungen der Curven f, welche den Geraden von Σ′ entsprechen, und der Flächen φ′, die den Ebenen von Σ korrespondieren, identisch.

§ 4. Der Grad von $\mathfrak{T}_{2,2}$.

34. Im Raume Σ sei eine beliebige Gerade g gegeben; die Ordnung der ihr in Σ′ entsprechenden Curve f′ soll ermittelt werden. Wir verfahren ähnlich wie beim ebenen Problem, indem wir Gerade g und ihre verbundene Curve 7. Ordnung (§ 2) durch Gebilde von Σ erzeugen, deren entsprechende Gebilde in Σ′ uns bekannt sind. Nun geht durch eine beliebige Gerade g des Raumes eine und nur eine Fläche F des Gebüsches G; da diese sich selbst verbunden ist, trägt sie auch die der g verbundene Curve. Die ihr in Σ′ entsprechende Fläche F′ von G′ muss daher die der g entsprechende Curve f′ enthalten. Es kommt also darauf an, eine zweite Trägerfläche für g und ihre verbundene Curve zu konstruieren, und zwar mittels der Elemente des Gebüsches G.

Zu diesem Zwecke greifen wir aus dem Gebüsche G zwei Büschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ heraus, welche einem beliebigen Netze N von G angehören, das also die Fläche F nicht enthält. Seien P, $\overline{P}$ die veränderlichen Grundpunkte des Netzes N, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ die Grundcurven der Büschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; letztere Curven tragen wie alle Büschelgrundcurven von G Involutionen verbundener Punkte, sind also sich selbst verbunden. Durch jeden Punkt X von g geht aus den Büscheln $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ je eine Fläche; auf der Schnittcurve vierter Ordnung beider, einer Büschelgrundcurve von N in G, befindet sich der dem X verbundene Punkt $\overline{X}$. Durchlaufen wir also mit dem Punkte X die Gerade g, so erhalten wir ein Continuum von ∞^1 Raumcurven vierter Ordnung, eine Fläche, die zu jedem Punkte X von g auch den verbundenen $\overline{X}$ enthält, also die ganze Gerade g nebst ihrer verbundenen Curve trägt. Aus den Büscheln ordnen wir daher solche Flächen einander zu, die sich auf g schneiden. Da jede Fläche eines Büschels zwei Punkte mit g gemeinsam hat, von denen jeder eine Fläche des andern Büschels festlegt, so entsteht zwischen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ eine zwei-zweideutige Verwandtschaft. Ist l eine beliebige Gerade des Raumes, so geht durch einen beliebigen Punkt auf ihr aus $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$) eine Fläche, deren zwei entsprechende Flächen aus $\mathfrak{B}_2$ ($\mathfrak{B}_1$) vier Punkte einschneiden, die jenem Punkte zugeordnet werden. Auf l entsteht also eine Punktkorrespondenz [4,4], deren acht Coincidenzen lehren, dass das Gesamterzeugnis der Büschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ eine Fläche achter Ordnung ist. In eine beliebige Gerade durch einen der acht Grundpunkte $A_1, \ldots A_6$, P, $\overline{P}$ von N wird ausserhalb des betreffenden Grundpunktes eine Punktkorrespondenz [2,2] mit vier Coincidenzen eingeschnitten; folglich müssen sich vier der acht Schnittpunkte der Gerade mit dem gesamten Erzeugnisse in dem betrachteten Grundpunkte vereinigt haben. Die genannten acht Grundpunkte liegen auf dem Erzeugnisse vierfach. Auf einer beliebigen Gerade durch einen Punkt von $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$ wird ausserhalb des Schnittpunktes eine Korrespondenz [2,4] bezw. [4,2] mit sechs Coincidenzen eingeschnitten; jener Schnittpunkt und daher die ganze Curve

$\mathfrak{R}_1$ bezw. $\mathfrak{R}_2$ liegt auf dem Erzeugnisse doppelt. Als Büschel desselben Netzes N haben $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ eine Fläche gemeinsam; jedesmal, wenn ein die Gerade g beschreibender Punkt in einen der beiden Schnittpunkte dieser Fläche mit g gelangt, fallen die beiden durch ihn aus $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ ausgeschiedenen Flächen zusammen, ihr Schnitt ist nicht eine Curve, sondern die ganze Fläche selbst. Die gemeinsame Fläche von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ entspricht also sich selbst und gehört, weil sie zweimal zustande kommt, dem Gesamterzeugnisse doppelt an. Da sie aber weder g noch deren verbundene Curve enthält, können wir von ihr absehen. Für uns kommt also allein die noch übrig bleibende Fläche vierter Ordnung F^4 in Betracht, welche in den acht Grundpunkten von N noch Doppelpunkte besitzt, während die beiden Grundcurven $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ sich nicht mehr auf ihr befinden. Dafür enthält aber diese Fläche die Gerade g und deren verbundene Curve siebenter Ordnung; die beiden Curven bilden also den vollständigen Schnitt von F^4 und F. Die Punkte P, $\overline{P}$ befinden sich nach Voraussetzung nicht auf F, also auch nicht auf der Schnittcurve. Nimmt man (r_3) als Netz, so ergiebt sich F^4 als die gemeinsame Regelfläche der Congruenz der Doppelsecanten von r_3 und des Strahlengebüsches der Treffgeraden von g (Sturm, Math. Ann. I, S. 566). Hätten wir P auf g angenommen, so hätte sich eine Projektivität zwischen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ mit einem gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Elemente ergeben, deren eigentliches Erzeugnis F gewesen wäre. Wir suchten aber eine von F verschiedene Fläche, die g und deren verbundene Curve enthält. Da F und F^4 durch die sechs festen Grundpunkte $A_1, \ldots, A_6$ gehen und F^4 in diesen Punkten Doppelpunkte besitzt, so muss auch die Schnittcurve beider Flächen diese Punkte zu Doppelpunkten haben; da g keinen dieser Punkte enthält, liegen sie auf der verbundenen Curve. Dies stimmt mit dem in § 2 Gesagten überein.

Transformieren wir jetzt durch die Collineation in den Raum Σ', so erhalten wir in dem N entsprechenden Netze N′ zwischen den Büscheln $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}'_2$ eine zwei-zweideutige

Korrespondenz mit einem gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Elemente. Wie sein entsprechendes Element in Σ löst sich letzteres doppelt von dem Gesamterzeugnisse achter Ordnung ab; als eigentliches Erzeugnis bleibt, der Fläche F^4 entsprechend, eine Fläche vierter Ordnung F'^4, welche in den acht associierten Grundpunkten des Netzes N′ Doppelpunkte besitzt. Sie und die der F entsprechende F′ liefern, weil F′ keine ausgezeichneten Curven enthält und g nebst ihrer verbundenen Curve den vollen Schnitt von F und F^4 bildet, mit ihrem vollen Schnitte achter Ordnung, der in den sechs Grundpunkten B'_i Doppelpunkte besitzt, die der Gerade g und auch deren verbundener Curve siebenter Ordnung entsprechende Curve f′ in Σ'. Aus dem Verlaufe der Konstruktion geht hervor, dass wir zu demselben Ergebnisse gekommen wären, wenn wir von Σ' unseren Ausgang genommen hätten.

Der Grad der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ *ist* $n = 8$.

Die angeführte Erzeugung der Curven f′ bietet den Vorteil, dass sie f′ als vollen Schnitt zweier Flächen darstellt. Hierdurch wird die Abzählung der gemeinsamen Punkte dieser Curve mit irgend einer Fläche und die Bestimmung ihres Ranges wesentlich erleichtert.

35. Sehen wir zu, ob das System der Curven f′ ausser den sechs Grundpunkten B'_i noch andere feste Punkte besitzt. Zu diesem Zwecke zählen wir die gemeinsamen Punkte zweier Curven f'_1, f'_2 ab. Denken wir uns Curve f'_1 auf die angegebene Weise konstruiert, so befindet sie sich auf einer und nur einer Fläche F'_1 von G′, welche mit f'_2 16 gemeinsame Punkte hat. Die sechs Grundpunkte B'_i, auf jener Fläche einfach und auf dieser Curve doppelt gelegen, zählen für 12 gemeinsame Punkte, folglich bleiben noch vier Schnittpunkte von F'_1 und f'_2. Von diesen fällt aber keiner mehr auf f'_1; denn der jener F'_1 entsprechenden Fläche F_1, welche die der f'_1 entsprechende Gerade g und deren verbundene Curve f^7_1 trägt, begegnet die Gerade g_2 in irgend zwei Punkten, deren verbundene der dieser g_2 verbundenen f^7_2 mit F_1 gemeinsam sind, weil F_1 sich selbst verbunden ist. Diesen zwei veränderlichen Paaren verbundener Punkte, welche g_2

und f^7_2 mit F_1 gemeinsam haben und von denen kein Punkt auf g_1 oder f^7_1 fällt, entsprechen zwei Paare verbundener veränderlicher Schnittpunkte von f'_2 mit F'_1, ausserhalb der Curve f'_1; dies sind die eben gefundenen vier Punkte. Zwei beliebige Curven f′ besitzen also ausser den sechs Grundpunkten B'_i keine weiteren gemeinsamen festen Punkte und im allgemeinen, nämlich wenn g_1 (g_2) weder g_2 (g_1) noch f^7_2 (f^7_1) trifft, auch keine veränderlichen gemeinsamen Punkte. Ferner folgt hieraus und aus früher Gesagtem (§ 3), dass die sechs Grundpunkte B'_i die einzigen Doppelpunkte auf f′ sind.

Um das Geschlecht der Curven f′ zu ermitteln, projicieren wir eine Curve f′ aus einem beliebigen Punkte des Raumes durch einen Kegel achter Ordnung auf eine beliebige Ebene. Die Projektion, eine ebene Curve achter Ordnung, hat die Projektionen der sechs Doppelpunkte von f′ zu Doppelpunkten; ihre übrigen Doppelpunkte rühren von „scheinbaren“ Doppelpunkten der Curve f′ her, werden also von Doppelsecanten der f′ aus dem Projektionszentrum in die Ebene eingeschnitten. Die Anzahl h derselben ergiebt sich aus der Formel: $n\,(n-1) = r + 2\,(d + h) + 3s$, wobei n die Ordnung acht, r den Rang, d die Anzahl sechs der Doppelpunkte, welche Projektionen der wirklichen Doppelpunkte von f′ sind, s die Anzahl der Rückkehrpunkte der ebenen Projektionscurve bedeuten. Da Rückkehrpunkte der Projektionscurve im allgemeinen nur aus Rückkehrpunkten der Raumcurve entstehen können, letztere aber solche nicht enthält, so ist $s = 0$. Der Rang von f′ ist, weil diese Curve voller Durchschnitt zweier Flächen, F′ und F'^4, ist, nach bekanntem Satze $2.4.(2 + 4 - 2) - 6.2 = 20$, wobei berücksichtigt ist, dass jeder Doppelpunkt der Curve den Rang um zwei vermindert. Mittels $n = 8$, $d = 6$, $s = 0$, $r = 20$ ergiebt sich $h = 12$; folglich ist das Geschlecht der ebenen Curve $^1/_2\,(8-1)\,(8-2) - (6 + 12 + 0) = 3$; diese Zahl heisst auch das Geschlecht der Raumcurve f′.

Die Curven jedes Raumes, welche den Geraden des anderen entsprechen, sind von der Ordnung 8, dem Geschlechte 3 und dem Range 20; die sechs festen Grundpunkte ihres Raumes sind für sie Doppelpunkte; die Congruenz der Doppelsecanten einer solchen Curve hat die Ordnung 12 und die Classe 28.

Zwei beliebige Punkte X', Y' scheiden eine endliche Anzahl dieser Curven aus. Die entprechenden Punktepaare $X, \bar{X}$, $Y, \bar{Y}$ legen vier Geraden fest, von denen jede aus jedem der beiden Punktepaare einen Punkt enthält. Ihnen entsprechen vier Curven f', welche durch die Punkte X', X', Y', $\bar{Y}'$ gehen.

Durch zwei beliebig gegebene Punkte des Raumes gehen vier Curven f (f').

Wie bekannt, giebt es im Gebüsche G' im allgemeinen eine und nur eine Fläche F', welche eine gegebene f' enthält; jede Gerade aus den beiden auf dieser Fläche befindlichen Regelschaaren schneidet die zur Construction von f' benutzte Fläche F'^4 in vier Punkten, welche notwendig auf der Schnittcurve von F' und F'^4, also auf f' liegen müssen. Durch jeden Punkt von F', ebenso daher durch jeden Punkt von f' gehen zwei vierfache Secanten der Curve; jede derselben repräsentiert sechs Doppelsecanten. Dies ist die Anzahl $h_1 = 6$, welche die Formel $h - h_1 = n - 2$ liefert, wenn man f' aus einem ihrer Punkte in eine beliebige Ebene projiciert.

Die Collineation zwischen den Gebüschen G, G' hat zur Folge, dass jedem Büschel ein Büschel, also auch jeder Büschelgrundcurve aus G (G') eine solche aus G' (G) entspricht. Dabei entsprechen auch die beiden Involutionen verbundener Punkte auf je zwei entsprechenden Curven einander; insbesondere wird dem Punktepaare, das aus einem Grundpunkte und dem ihm im Continuum auf der Curve verbundenen Punkte besteht, ein Punktepaar auf der entsprechenden Curve korrespondieren; es ist das Paar veränderlicher Schnittpunkte der letztgenannten Curve mit der dem Grundpunkte im anderen Raume entsprechenden Hauptfläche zweiten Grades, welche im folgenden Paragraphen abgeleitet werden wird.

Geben wir nun eine beliebige Gerade g durch einen Grundpunkt A_i, so ist ihr eine cubische Raumcurve verbunden, f^3, welche durch die fünf übrigen Grundpunkte einfach geht und der Gerade g zweimal begegnet (§ 2). g und f^3 zusammen bilden die Grundcurve vierter Ordnung eines Büschels aus

G, der durch zwei beliebig auf g gelegte Punkte ausgeschieden wird. Diesem Büschel entspricht ein Büschel aus G′, dessen Grundcurve wegen des allgemeinen Charakters der collinearen Beziehung zwischen G und G′ nicht zerfallen wird.

Einer Gerade durch einen der festen Grundpunkte A_i (B'_i) *entspricht eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, welche dem Gebüsche des anderen Raumes als Büschelgrundcurve angehört.*

36. Wir wissen bereits, dass auch die Flächen jedes Raumes, welche den Ebenen des anderen entsprechen, achter Ordnung sein müssen. Um die Vielfachheit der sechs festen Grundpunkte auf einer solchen Fläche, etwa φ in Σ, die einer Ebene α' von Σ' entspricht, zu bestimmen, legen wir durch einen der Grundpunkte, A_i, eine beliebige Gerade g. Die entsprechende Curve vierter Ordnung begegnet der Ebene α' in vier veränderlichen Punkten, von denen keine zwei einander verbunden sind und von denen (nach dem Vorangehenden) im allgemeinen keiner dem Punkte A_i entspricht. Die entsprechenden vier Paare verbundener Punkte liegen sämtlich auf φ, und von jedem Punktepaare befindet sich ein Punkt auf g. Die Gerade g hat mit φ vier veränderliche Punkte gemeinsam, folglich müssen vier Schnittpunkte von g und φ im Punkte A_i vereinigt sein, d. h. A_i ist vierfacher Punkt von φ. Dasselbe gilt für die übrigen Grundpunkte.

Den Ebenen jedes Raumes entsprechen Flächen achter Ordnung, welche in den sechs Grundpunkten ihres Raumes vierfache Punkte besitzen.

Geben wir drei beliebige Punkte X′, Y′, Z′ in Σ' und fragen nach der Anzahl der durch sie gehenden Flächen φ', so müssen wir abzählen, wieviel Ebenen von Σ aus jedem der drei entsprechenden Punktepaare X $\overline{X}$, Y $\overline{Y}$, Z $\overline{Z}$ einen Punkt enthalten. Die Anzahl dieser Ebenen ist acht. Ihnen entsprechen Flächen φ', welche die drei gegebenen Punkte und natürlich auch deren verbundene enthalten.

Durch drei beliebig gegebene Punkte des Raumes gehen acht Flächen φ (φ').

Eine beliebige Fläche m-ter Ordnung F^m in Σ begegnet einer Curve f, die einer Gerade g' von Σ' entspricht, in 8m Punkten, unter denen sich im allgemeinen keine zwei verbundenen befinden. Die 8m entsprechenden Paare verbundener Punkte liegen sämtlich auf der zu F^m entsprechenden Fläche, während auf der jener f entsprechenden Gerade g' von jedem Punktepaare nur ein Punkt sich befindet. Die der Fläche F^m korrespondierende Fläche schneidet also eine beliebige Gerade g' von Σ' in 8m Punkten, ist mithin von der Ordnung 8m.

Legen wir durch einen der festen Grundpunkte von Σ', B'_i, eine beliebige Gerade, so entspricht ihr eine Büschelgrundcurve vierter Ordnung des Gebüsches G; diese hat mit F^m 4m veränderliche Punkte gemeinsam, unter denen sich im allgemeinen keine zwei verbundenen Punkte und auch kein dem B'_i entsprechender Punkt befinden wird. Diesen 4m Punkten entsprechen 4m Paare verbundener Punkte in Σ'; nehmen wir aus jedem Paare den auf g' gelegenen Punkt, so stellen diese 4m Punkte die einzigen veränderlichen Schnittpunkte von g' mit der zu F^m entsprechenden Fläche dar; da letztere von der Ordnung 8m ist, müssen sich 4m Schnittpunkte in dem betrachteten Punkte B'_i vereinigt haben.

Einer beliebigen Fläche m-ter Ordnung eines Raumes entspricht eine Fläche der Ordnung 8m im anderen, welche in den Grundpunkten ihres Raumes 4m-fache Punkte hat.

Ist nun eine Curve als voller Schnitt zweier Flächen gegeben, so ermöglicht dieser Satz, die ihr entsprechende Curve zu finden.

§ 5. Die Hauptelemente.

37. Es wurde bereits bemerkt (§1), dass bei unserer beliebigen Collineation zwischen G und G' den Kegeln des einen Gebüsches in der Regel allgemeine Flächen des anderen Gebüsches entsprechen; dies wird also auch für die Kegel gelten, welche in $\mathfrak{T}_{1,1}$ ($\mathfrak{T}'_{1,1}$) die zu den Grundpunkten

A_i (B'_i) gehörigen Hauptkegel a_i (b'_i) sind. Eine Curve f, die einer Gerade g' von Σ' entspricht, hat mit einem Kegel a_i in den sechs Grundpunkten A_i im ganzen 14 feste, mithin noch zwei veränderliche Punkte gemeinsam; diese sind den beiden im Doppelpunkte A_i vereinigten Punkten der Curve verbunden in der Involution verbundener Punkte auf der Curve. Ihnen entsprechen zwei Paare verbundener Punkte, die sich auf g' und ihre verbundene Curve verteilen und sämtlich auf dem zu A_i entsprechenden Gebilde liegen; letzteres begegnet der beliebigen Gerade g' von Σ' in zwei Punkten, ist also eine Fläche zweiten Grades. Jedesmal, wenn ein die Gerade g' durchwandernder Punkt in einen der Schnittpunkte von g' mit a'_i kommt, windet sich die entsprechende Curve f durch den entsprechenden Grundpunkt A_i.

Weil die Hauptflächen a'_i (b_i) dem Gebüsche G' (G) angehören, enthalten sie die sechs Grundpunkte desselben einfach. Hinsichtlich der Punkte ist jede dieser Flächen eindeutig auf den entsprechenden Kegel a_i (b'_i) bezogen, indem jedem Punkte von a'_i (b_i) ein ganz bestimmter Punkt des entsprechenden Kegels korrespondiert, abgesehen von der Spitze des Kegels, dem Grundpunkte A_i (B'_i) selbst; dieser entspricht allen Punkten der Hauptfläche. Umgekehrt entsprechen jedem veränderlichen Punkte des Kegels a_i (b'_i) zwei verbundene Punkte auf a'_i (b_i), dem Grundpunkte A_i (B'_i) alle Paare verbundener Punkte auf der entsprechenden Hauptfläche.

Hieraus folgt, dass, wenn eine beliebige Fläche m-ter Ordnung F^m durch einen der Grundpunkte A_i k-fach geht, die entsprechende Hauptfläche a'_i sich k-fach ablöst. Als eigentliches, der Fläche F^m entsprechendes Gebilde bleibt eine Fläche der Ordnung $8m-2k$. Mit der Hauptfläche a'_i haben sich die Grundpunkte B'_i im ganzen je k-mal abgelöst, folglich befinden sie sich auf der Restfläche noch in der Vielfachheit $4m-k$.

Mit den sechs Grundpunkten jedes Raumes ist die Anzahl der Hauptpunkte, denen Hauptflächen im anderen

Raume entsprechen, erschöpft. Denn gäbe es noch einen solchen Punkt, so müsste jede beliebige Gerade des anderen Raumes seiner Hauptfläche in veränderlichen Punkten begegnen, er selbst müsste also auf sämtlichen Curven f (f') liegen. Dies ist aber nicht möglich, weil die letztgenannten Curven ausser den sechs festen Grundpunkten ihres Raumes keinen festen Punkt gemeinsam haben (§ 4, 35 Anfang).

Den sechs Gebüschgrundpunkten jedes Raumes entsprechen allgemeine Flächen zweiten Grades aus dem Gebüsche des anderen Raumes. Sie sind die einzigen Hauptpunkte mit entsprechenden Hauptflächen.

38. Ausserdem besitzt unsere Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ noch Hauptpunkte anderer (II.) Art. Es wurde erwähnt (§ 2), dass jedes der Gebüsche G, G′ 16 ausgezeichnete Netze besitzt, von denen jedes statt einer endlichen Anzahl von Grundpunkten eine ganze Grundcurve besitzt. Infolge der Allgemeinheit der collinearen Beziehung entsprechen ihnen allgemeine Flächennetze, also mit einer endlichen Anzahl von Grundpunkten. Da wir solche veränderliche Punkte, die zur Festlegung zweier entsprechenden Netze dienen, einander zugeordnet haben, so müssen wir jedem Punkte der Grundcurve eines ausgezeichneten Netzes das Paar veränderlicher Grundpunkte des entsprechenden Netzes und umgekehrt, jedem Punkte des letztgenannten Punktepaares jeden Punkt der Grundcurve als entsprechend ansehen. Wir bezeichnen diejenigen Punktepaare, welche der Curve r_3 und den 15 Graden $p_{i,k}$ entsprechen, mit R′, $\bar{\mathrm{R}}'$ und $\mathrm{P}'_{i,k}$, $\bar{\mathrm{P}}'_{i,k}$, die der Curve s_3' und den 15 Geraden $q'_{i,k}$ entsprechenden Punktepaare mit S, $\bar{\mathrm{S}}$ und $\mathrm{Q}_{i,k}$, $\bar{\mathrm{Q}}_{i,k}$.

Da die Curve r_3 (s_3') jeder Ebene α (α') ihres Raumes dreimal, jede der Geraden $p_{i,k}$ ($q'_{i,k}$) dieser Ebene einmal begegnet, so kommen, jedem dieser Schnittpunkte entsprechend, die Hauptpunkte R′, $\bar{\mathrm{R}}'$ (S, $\bar{\mathrm{S}}$) je dreifach, die Punktepaare $\mathrm{P}'_{i\,k}$, $\bar{\mathrm{P}}'_{i,k}$ ($\mathrm{Q}_{i,k}$, $\bar{\mathrm{Q}}_{i\,k}$) je einfach auf die entsprechende Fläche φ' (φ).

Wir behaupten nun, dass mit diesen Punkten und den sechs Gebüschgrundpunkten die Anzahl der festen gemein-

samen Punkte der Flächen φ' (φ) erschöpft sind. Zu dem Zwecke zählen wir die gemeinsamen Punkte von drei beliebigen dieser Flächen, etwa φ_1', φ_2', φ_3' in Σ', ab. Als Flächen achter Ordnung müssen sie $8^3 = 512$ gemeinsame Punkte haben. Die sechs Grundpunkte B'_i, je vierfach auf jeder Fläche gelegen, zählen für $6.4^3 = 384$, die 16 Paare von Hauptpunkten II. Art für $2.3^3 + 15.2.1^3 = 84$ gemeinsame Punkte; folglich bleiben noch 44 Schnittpunkte übrig. Andererseits haben die entsprechenden Gebilde in Σ: α_1, φ_1^7; α_2, φ_2^7; α_3, φ_3^7 folgende veränderlichen Punkte gemein, denen veränderliche Schnittpunkte der drei Flächen φ_1', φ_2', φ_3' entsprechen müssen: Punkt (α_1, α_2, α_3) und seinen verbundenen Punkt (φ_1^7, φ_2^7, φ_3^7), ferner die dreimal sieben Punkte (α_1, α_2, φ_3^7), (α_2, α_3, φ_1^7), (α_3, α_1, φ_2^7) und ihre verbundenen Punkte (φ_1^7, φ_2^7, α_3), (φ_2^7, φ_3^7, α_1), (φ_3^7, φ_1^7, α_2). Dies sind im ganzen 22 Paare verbundener Punkte; ihnen entsprechen 22 Paare verbundener, veränderlicher Schnittpunkte von φ_1', φ_2', φ_3'. Hiermit haben wir die 44 Punkte, die bei der obigen Abzählung übrig blieben. Für weitere gemeinsame feste Punkte der drei Flächen ist also kein Platz: die ermittelten 38 Hauptpunkte sind die einzigen festen Punkte auf einer beliebigen Fläche φ' (φ). Zugleich zeigt sich, und eine Abzählung der gemeinsamen Curven zweier Flächen φ' (φ) würde es bestätigen, dass die Flächen φ' (φ) keine feste Curve gemeinsam haben.

Wir schliessen weiter, dass die gefundenen Hauptpunkte II. Art die einzigen in unserer Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ sind, denen Hauptcurven entsprechen. Denn gäbe es einen weiteren Hauptpunkt dieser Art, so müsste seine entsprechende Hauptcurve jeder beliebigen Ebene ihres Raumes in Punkten begegnen, denen entsprechend der betrachtete Hauptpunkt auf die sämtlichen Flächen φ' (φ) käme. Da diese Flächen aber ausser den bereits bekannten festen Punkten keine weiteren festen besitzen, so sind weitere Hauptpunkte der genannten Art nicht möglich.

Den 16 Grundcurven der ausgezeichneten Netze jedes Gebüsches entsprechen 16 Paare verbundener Punkte. Diese

Punkte sind die einzigen Hauptpunkte von $\mathfrak{T}_{2,2}$, *denen Hauptcurven entsprechen.*

Einer beliebigen Fläche F^m von Σ begegnet r_3 in 3m, jeder Gerade $p_{i,k}$ in m Punkten, folglich liegen die entsprechenden Hauptpunkte R', $\bar{R}'$ je 3m-fach, die Punktepaare $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ je m-fach auf der entsprechenden Fläche.

Enthält die Fläche F^m einen der 32 Hauptpunkte II. Art von Σ k-fach, so kommt die entsprechende Hauptcurve k-fach auf die entsprechende Fläche. Liegt auf F^m ein Paar verbundener Hauptpunkte II. Art, so befindet sich die entsprechende Hauptcurve doppelt auf der jener F^m korrespondierenden Fläche.

39. Untersuchen wir die Lage der sechs Hauptflächen a'_i inbezug auf die Hauptpunkte. Sämtliche Kegel a_i in Σ gehören dem Netze (r_3) an, folglich sind die Flächen a'_i im Netze $(R', \bar{R}')$ enthalten, gehen also durch R' und $\bar{R}'$. Jeder Kegel a_i gehört ausserdem zu den fünf Netzen $(p_{i,k})$, deren Grundgeraden $p_{i,k}$ von seiner Spitze A_i ausgehen; die entsprechende Fläche a'_i befindet sich in den fünf entsprechenden Netzen $(P'_{i,k}, \bar{P}'_{i,k})$, enthält also deren Grundpunkte. Endlich gehören jedem Netze $(p_{i,k})$ zwei Kegel a_i an, folglich gehen durch jedes Punktepaar $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ zwei Hauptflächen a'_i.

Die sechs Hauptflächen a'_i *in* Σ' $(b_i$ *in* $\Sigma)$ *unserer* $\mathfrak{T}_{2,2}$ *haben das Punktepaar* R', $\bar{R}'$ (S, S) *gemeinsam; jede zwei gehen durch ein Punktepaar* $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ $(Q_{i,k}, \bar{Q}_{i,k})$, *und jede dieser Flächen enthält ausser* R', $\bar{R}'$ (S, S) *noch fünf Punktepaare* $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ $(Q_{i,k}, \bar{Q}_{i,k})$, *sämtlich einfach.*

Hat eine beliebige Fläche F^m einen Grundpunkt A_i zum k-fachen Punkte, so gehen mit der Hauptfläche a'_i auch die auf ihr befindlichen Hauptpunkte II. Art von Σ' je k-fach ab, so dass die eigentlich entsprechende Fläche der Ordnung 8m—2k die Punkte R', $\bar{R}'$ noch je (3m—k)-, jedes der fünf Punktepaare $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ auf a'_i noch (m—k)- und jedes der übrigen 10 Punktepaare m-fach enthält.

Sollten sich einmal sämtliche sechs Hauptflächen a'_i (b_i) ablösen, so gehen mit ihnen insgesamt die sechs

Grundpunkte B'_i (A_i), ebenso R' und $\bar{R}'$ (S und $\bar{S}$) je sechsfach, die 15 Punktepaare $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$ ($Q_{i,k}$, $\bar{Q}_{i,k}$) je doppelt ab.

Benutzen wir diese Ergebnisse dazu, um zu einer Fläche φ von Σ, welche einer Ebene α' von Σ' korrespondiert, die entsprechende Fläche abzuleiten. Zunächst entspricht dieser Fläche achter Ordnung eine Fläche der Ordnung 64 mit 32-fachen Punkten in den B'_i, 24-fachen Punkten in den R', $\bar{R}'$, achtfachen Punkten in den 15 Punktepaaren $P'_{i,k}$, $\bar{P}'_{i,k}$. Da φ die sechs Grundpunkte A_i zu vierfachen Punkten hat, löst sich die Gesamtheit der Hauptflächen a'_i viermal ab; die Restfläche ist von der Ordnung 16 und hat die Punkte B'_i zu achtfachen Punkten, während sich die übrigen 16 Paare verbundener Hauptpunkte nicht mehr auf dieser Fläche befinden. Den dreifachen Punkten S, $\bar{S}$ und den einfachen Punkten $Q_{i,k}$, $\bar{Q}_{i,k}$ auf φ entsprechend, liegen auf dieser Fläche 16. Ordnung die Curve s_3' sechsfach, jede der 15 Geraden $q'_{i,k}$ doppelt. Da nun aber φ sich selbst verbunden ist, entspricht ihr eine doppeltzählende Fläche; diese eigentliche der φ entsprechende Fläche ist also achter Ordnung, hat in den sechs Grundpunkten B'_i vierfache Punkte und enthält die Curve s_3' dreifach, jede Gerade $q'_{i,k}$ einfach. Wie wir wissen, zerfällt diese Fläche in die Ebene α' und ihre verbundene Fläche $\varphi^{7'}$. Dass in der Tat letztere Fläche die angegebenen Eigenschaften besitzt, ist in § 2 mitgeteilt.

40. Die ∞^2 Büschelgrundcurven des Netzes (r_3) bestehen aus der festen Curve r_3 und einem veränderlichen Teile, einer Doppelsecante dieser Curve; umgekehrt bildet r_3 mit jeder ihrer Doppelsecanten die Grundcurve eines Büschels von (r_3). Ihnen entsprechen die Büschelgrundcurven des Netzes $(R', \bar{R}')$, in der Regel allgemeine Curven vierter Ordnung erster Art. Der Involution verbundener Punkte auf der veränderlichen Doppelsecante entspricht die axiale (§ 2) Involution verbundener Punkte auf der entsprechenden Curve, insbesondere dem Paare verbundener Stützpunkte der Doppelsecante auf r_3 das Punktepaar

R', $\bar{R}'$. Umgekehrt korrespondiert einer Büschelgrundcurve von $(R', \bar{R}')$ ausser r_3 eine Doppelsecante von r_3; den Punkten R', $\bar{R}'$ auf jener Curve entspricht die ganze Curve r_3 und im Continuum der Paare verbundener Punkte auf der Doppelsecante ein Punktepaar, deren Stützpunkte auf r_3.

Der Kongruenz der Doppelsecanten der Curve r_3 $[s_3']$ entspricht der Bündel der Büschelgrundcurven des Netzes $(R', \bar{R}')$ $[(S, \bar{S})]$.

Die Reduktion, welche die Ordnung 8 der Curve f', die zunächst einer Doppelsecante von r_3 als Gerade von Σ entsprechen sollte, erfährt, rührt daher, dass die Doppelsecante sich selbst verbunden ist; deshalb muss die f' eine doppeltzählende Curve vierter Ordnung sein.

Da ferner jede beliebige Ebene α von Σ drei Doppelsecanten der r_3 enthält, so giebt es auf jeder Fläche φ' in Σ' drei Büschelgrundcurven vierter Ordnung des Netzes $(R', \bar{R}')$. Nach § 3 stellen diese Curven Doppelcurven der Flächen φ' dar.

(r_3) hat mit $(S, \bar{S})$ einen Büschel gemein, dessen Grundcurve aus r_3 und der Doppelsecante aus S (oder $\bar{S}$) an r_3 besteht. Ihr entspricht die Grundcurve des gemeinsamen Büschels der Netze $(R', \bar{R}')$ und (s_3'), also die Doppelsecante aus R' an s_3'. Der Involution verbundener Punkte auf $S\,\bar{S}$ entspricht die auf $R'\,\bar{R}'$. Die Konstruktion lehrt, dass diese beiden Doppelsecanten das einzige Paar entsprechender Doppelsecanten in $\mathfrak{T}_{2,2}$ sind. Also:

Es giebt in jedem Raume eine Doppelsecante von r_3 bezw. s_3', welcher wieder eine Doppelsecante im anderen Raume entspricht. Beide Doppelsecanten entsprechen einander und gehen aus S an r_3 bezw. aus R' an s_3'.

Die Doppelsecante aus einem Punkte $P'_{i,k}$ an s_3' bildet mit s_3' die Grundcurve des gemeinsamen Büschels der Netze (s_3') und $(P'_{i,k}, \bar{P}'_{i,k})$; ihr entspricht die Grundcurve des gemeinsamen Büschels der entsprechenden Netze, also ausser $p_{i,k}$ eine kubische Raumcurve, welche durch die vier übrigen Grundpunkte A ausser A_i und A_k und durch S und $\bar{S}$

einfach geht sowie der Gerade $p_{i,k}$ in einem veränderlichen Paare verbundener Punkte begegnet.

Die zuletzt erhaltenen Sätze können wir, anschliessend an § 4, 34, zur Konstruktion einer Trägerfläche besonderer Art für die einer Gerade g' von Σ' entsprechende f verwerten. Die Gerade g' und ihre verbundene Curve $f^{7'}$ liegen auf einer Fläche von G': um die früher besprochene zweite Trägerfläche vierter Ordnung zu erzeugen, benutzen wir nicht wie in § 4, 1 zwei Büschel eines beliebigen Netzes von G', sondern zwei Büschel aus $(R', \overline{R}')$. Wird dann wie in § 4,1 zwischen den Büscheln die zwei-zweideutige Verwandtschaft festgelegt, so ist das Erzeugnis eine Fläche vierter Ordnung $F^{4'}$ mit Doppelpunkten in den acht Grundpunkten von $(R', \overline{R}')$; sie wird von den Büschelgrundcurven des Netzes $(R', \overline{R}')$ beschrieben, welche g' treffen. Hieraus folgt übrigens auch, dass sie die einzige Fläche ihrer Art durch g' ist, welche zwei Büschel von $(R', \overline{R}')$ man auch zu ihrer Erzeugung wählt. Ihr entspricht das eigentliche Erzeugnis F^4 der entsprechenden Büschel in (r_3), welche also durch Doppelsecanten der r_3 beschrieben wird. Die Curve r_3 liegt auf dieser Fläche doppelt. Die Curve f ist der volle Schnitt von F^4 und F. Zu derselben Fläche F^4 wären wir gelangt, wenn wir aus jedem Punkte von f die Doppelsecante an r_3 gelegt und nach der durch diese Geraden beschriebenen Regelfläche gefragt hätten. Aus dem Umstande, dass F^4 die einzige Fläche ihrer Art durch f ist, welche durch zwei Büschel von (r_3) erzeugt wird, folgt, dass sie sämtliche gemeinsamen Doppelsecanten von r_3 und f enthält.

Hierzu noch eine Bemerkung. Um die gemeinsamen Doppelsecanten von r_3 und f direkt abzuleiten, darf man nicht nach gemeinsamen Geraden der beiden Kongruenzen von Doppelsecanten beider Curven fragen, sondern muss die Kongruenz (1,3) der Doppelsecanten von r_3 und den ganzen Komplex achten Grades der Treffgeraden von f ins Auge fassen; denn jede Doppelsecante von r_3, die f einmal trifft, hat auch noch einen zweiten, den jenem Treffpunkt ver-

bundenen Punkt mit ihr gemein (§ 3). Nach dem Halphen'schen Satze haben diese Kongruenz und dieser Komplex eine Regelfläche 32. Grades gemeinsam. Nun begegnet aber jede Kante eines Kegels a_i der Curve f in deren Doppelpunkt A_i zweimal, zählt also für zwei Treffgeraden von f; folglich gehören jener Regelfläche die sechs Kegel a_i doppelt an. Es bleibt noch eine Fläche achten Grades; sie wird repräsentiert durch unsere F^4; denn weil jede Doppelsecante von r_3, die f einmal trifft, auch noch ein zweites Mal schneidet, also für zwei Treffgeraden von f zählt, ist die ganze Fläche F^4 doppelt zu zählen. — Noch einfacher ergiebt sich der Grad dieser Fläche so: alle Doppelsecanten von r_3, welche eine beliebig gegebene Gerade l treffen, bilden eine Regelfläche 4. Grades (§ 4, 34), auf der sich r_3 und jeder der sechs festen Grundpunkte A_i doppelt befindet. Schneiden wir diese Fläche mit f, so bleiben abgesehen von den sechs Punkten A_i, welche für 24 gemeinsame Punkte zählen, noch acht veränderliche Schnittpunkte; diese zerfallen nach dem zitierten Satze von § 3 in vier Paare verbundener auf Doppelsecanten der r_3. Von der Regelfläche, deren Grad wir suchen, begegnen also der beliebigen Grade l vier Erzeugende: die Fläche ist vom Grade 4.

Analog kann man die Trägerfläche $F^{4\prime}$ für g' mittels verwandter Büschel aus (s_3'), also durch die Doppelsecanten von s_3', welche g' treffen, erzeugen; dann erhält man F^4 als Erzeugnis zweier Büschel von $(S, \overline{S})$.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass einer beliebigen Gerade g (g′) von Σ (Σ′) inbezug auf jedes Netz von G (G′) eine Fläche F^4 ($F^{4\prime}$) zugeordnet ist, welche sie nebst ihrer verbundenen Curve enthält.

41. Mit Rücksicht auf das Folgende müssen wir uns jetzt folgende Frage vorlegen: was entspricht einer beliebigen Gerade durch einen der Hauptpunkte II. Art. Legen wir durch R′ eine beliebige Gerade g' und konstruieren die Trägerflächen zweiter und vierter Ordnung in Σ′ und Σ, so ergiebt

sich als entsprechende Curve ausser r_3 eine Curve fünfter Ordnung; dies lässt sich auch dadurch beweisen, dass man g' mit einer beliebigen φ' schneidet und die Schnittpunkte der jener g' entsprechenden Curve mit der dieser φ' entsprechenden Ebene α in Σ abzählt. F enthält die sechs Grundpunkte A_i einfach, F^4 doppelt, folglich hat die volle Schnittcurve beider in diesen Punkten Doppelpunkte. r_3 geht durch alle Punkte A_i einfach, mithin muss die Ergänzungscurve f^5 auch noch durch diese Punkte einfach laufen. Weil g jede Büschelgrundcurve von $(R', \overline{R}')$ auf F' in einem veränderlichen Punkte schneidet, begegnet f^5 jeder Doppelsecante von r_3 auf F in einem veränderlichen Paare verbundener Punkte. Ferner wird f^5 durch r_3 zu einem vollen Durchschnitte zweier Flächen ergänzt; die Anzahl der Schnittpunkte von r_3 mit einer beliebigen Fläche ist bekannt, mithin ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte von f^5 und einer beliebigen Fläche gleich dem Produkte ihrer Ordnungszahlen. Folglich schneidet f^5 eine beliebige Fläche F^* des Netzes (r_3) in vier veränderlichen Punkten; diese müssen auf der Schnittcurve von F^* mit F, also auf r_3 und einer Doppelsecante derselben, liegen. Nun enthält die Doppelsecante, wie bekannt, ein Paar verbundener Schnittpunkte, also r_3 selbst ein zweites Paar. f^5 schneidet r_3 ausser in den sechs Punkten A_i noch in einem veränderlichen Paare verbundener Punkte; dieses entspricht dem Punkte R' auf g' in der Involution verbundener Punkte auf f^5.

Ganz analog finden wir, dass einer beliebigen Gerade g' durch einen Punkt P'_{ik} ausser p_{ik} eine Curve siebenter Ordnung f^7 entspricht, welche durch A_i und A_k einfach durch die übrigen vier Grundpunkte A doppelt geht und p_{ik} ausser in A_i und A_k noch in einem Paare verbundener Punkte schneidet, das dem Punkte $P'_{i,k}$ auf g' in der Involution verbundener Punkte auf f^7 entspricht. Die Anzahl der Schnittpunkte von f^7 und einer beliebigen Fläche ist gleich dem Produkte ihrer Ordnungszahlen.

§ 6. Die Coincidenzflächen und die Grenzflächen.

42. Analog dem Verfahren beim ebenen Problem hinsichtlich der Kegelschnitte Ω, Φ' bedienen wir uns auch jetzt bei den Coincidenzflächen Ω uud Φ' der Vorstellung, dass jede dieser Flächen aus zwei unendlich nahe nebeneinander verlaufenden Flächen besteht. Betrachten wir speziell Ω, so bestehe sie aus den Flächen $\Omega \sim \bar{\Omega}$, von denen die eine, etwa Ω, sämtliche Punkte X, die andere $\bar{\Omega}$ sämtliche Punkte $\bar{X}$ enthalte. Unter den Punkten von $\bar{\Omega}$, die einem Punkte X von Ω unendlich benachbart sind, ist derjenige der dem X verbundene Punkt $\bar{X}$, welcher auf der Doppelsecante aus X an r_3 liegt.

Eine beliebige Curve schneidet die Flächen $\Omega \sim \bar{\Omega}$ in Punkten der Art $X \sim \bar{Y}$, welche also nicht Coincidenzpunkte sind. Begegnet dagegen eine sich selbst verbundene Curve der $\Omega \sim \bar{\Omega}$, so befindet sich der ihrem Schnittpunkte X mit Ω verbundene Punkt $\bar{X}$ auch auf der Curve; diese Curve trifft also $\Omega \sim \bar{\Omega}$ in einem Coincidenzpunkte $X \sim \bar{X}$; sie hat in $X \equiv \bar{X}$ eine Doppelsecante der r_3 zur Tangente.

Schneiden wir ferner $\Omega \sim \bar{\Omega}$ mit einer beliebigen Fläche in Σ, so erhalten wir auf letzterer zwei unendlich benachbart nebeneinander verlaufende Curven, die als ganze Curven nicht einander verbunden sind. Bei einer Fläche dagegen, die zu jedem ihrer Punkte auch den verbundenen enthält, sind die beiden Schnittcurven mit $\Omega \sim \bar{\Omega}$ einander verbunden; längs dieser Coincidenzcurve der Fläche berührt eine Regelfläche von Doppelsecanten der r_3.

Schneiden wir nun Ω mit einer beliebigen Curve f von Σ, die einer Gerade g' von Σ' entspricht, so zählen die sechs Punkte A_i für 24 gemeinsame einfache Punkte; es bleiben noch acht veränderliche Schnittpunkte, da f im allgemeinen keinen weiteren festen Punkt enthält; diese sind nach dem Obigen Coincidenzpunkte der Art $X \equiv \bar{X}$.

Die Involutionen verbundener Punkte auf den Curven f von Σ und f' von Σ' besitzen acht Doppelpunkte. In ihnen berühren Doppelsecanten von r_3 (s_3').

Den acht Coincidenzpunkten auf einer f von Σ entsprechen acht Paare verbundener Punkte, die sämtlich auf der unserer Ω entsprechenden Grenzfläche Ω' liegen und von denen jedes einen auf der jener f entsprechenden Gerade g′ von Σ gelegenen Punkt enthält. Ω' begegnet also einer beliebigen Gerade g′ von Σ' in acht Punkten, ist achter Ordnung. — Die einer beliebigen Gerade l′ durch einen Punkt B'_i entsprechende Curve vierter Ordnung schneidet Ω in vier Coincidenzpunkten; die vier entsprechenden Punktepaare, sämtlich auf Ω' gelegen, haben ihre einen Punkte auf l′. Ω' trifft also l′ ausserhalb B'_i viermal, mithin ist B'_i vierfacher Punkt von Ω'. — Die einer beliebigen Gerade l′ durch R′ oder $\overline{R}'$ entsprechende f^5 schneidet Ω ausser in den Punkten A_i und in zwei Punkten auf r_3 noch in sechs Coincidenzpunkten; ihnen entsprechen sechs Schnittpunkte von Ω' mit l′ ausserhalb R′ bezw. $\overline{R}'$; diese Hauptpunkte sind also Doppelpunkte von Ω'. — Die einer beliebigen Gerade l′ durch einen Punkt P'_{ik} entsprechende f^7 schneidet Ω ausser in den sechs Punkten A_i und zwei weiteren Punkten auf $p_{i,k}$ noch in sechs Coincidenzpunkten. Ω' begegnet der Gerade l′ sechsmal ausserhalb P'_{ik}, besitzt also in P'_{ik} selbst einen Doppelpunkt. Wir haben das Ergebnis:

Der Coincidenzfläche jedes Raumes entspricht eine Grenzfläche achter Ordnung im anderen, welche in den sechs Gebüschgrundpunkten ihres Raumes vierfache Punkte und in den 32 Hauptpunkten II. Art Doppelpunkte besitzt.

43. Eine beliebige Gerade schneidet $\Omega \sim \overline{\Omega}$ viermal in Punkten $X \sim \overline{Y}$; ihnen entsprechen viermal zwei einander unendlich benachbarte Paare verbundener Punkte auf Ω' und f′ d. h.

Sämtliche Curven f′ (f) von Σ' (Σ), welche den Geraden des anderen Raumes entsprechen, berühren Ω' (Φ) an acht veränderlichen Stellen, welche in vier Paare verbundener zerfallen.

Auch für die Flächen φ', welche den Ebenen von Σ entsprechen, lässt sich eine Taktionsbeziehung zu Ω' nachweisen. Eine beliebige Ebene α schneidet $\Omega \sim \overline{\Omega}$ in zwei unendlich

nahe nebeneinander verlaufenden ebenen Curven vierter Ordnung $C^4_1 \sim C^4_2$; diesen entsprechen zwei einander unendlich benachbarte Curven in Σ', welche zugleich auf Ω' und φ' liegen, längs deren sich also Ω' und φ' berühren. Dem vollen Schnitte von α mit Ω muss der volle Schnitt von φ' mit Ω' entsprechen, eine Curve 64. Ordnung. Damit sich diese Ordnung ergiebt, muss die als Schnittcurve doppelt zählende Berührungscurve 32. Ordnung sein. Dies stellt sich sofort heraus, wenn wir C^4_1 in α mit einer Fläche φ schneiden. Den 32 Schnittpunkten, unter denen sich im allgemeinen keine verbundenen befinden, entsprechen 32 Paare verbundener Punkte auf der jener C^4_1 entsprechenden Curve, welche ihre einen Punkte in α' haben. Jene Curve begegnet also dieser Ebene in 32 Punkten, ist 32. Ordnung. Eine ebensolche Curve 32. Ordnung entspricht der Curve C^4_2. Diese beiden Curven 32. Ordnung bilden zusammen den vollen Schnitt 64. Ordnung von φ' mit Ω'.

Sämtliche Flächen φ' (φ) von Σ' (Σ), welche den Ebenen des anderen Raumes entsprechen, berühren Ω' (Φ) je längs einer Curve 32. Ordnung, die dem Schnitte der entsprechenden Ebene α (α') mit Ω (Φ') entspricht.

Die Curve $C_1{}^4$ in α schneidet die Hauptflächen b_i je in 8 Punkten, unter denen sich im allgemeinen keine zwei verbundenen befinden; folglich hat die entsprechende Curve 32. Ordnung in jedem Punkte B'_i einen achtfachen Punkt. Da ferner $C_1{}^4$ durch jeden Spurpunkt der 16 Hauptcurven r_3 und p_{ik} einfach geht, sind R', R' dreifache, die übrigen Hauptpunkte II. Art in Σ' einfache Punkte der entsprechenden Curve. Diese Curve wird auch von den acht Berührungspunkten einer Curve f' beschrieben, wenn die entsprechende Gerade in Σ die Ebene α durchläuft. — Jede Fläche φ' (φ) besitzt in ihrem Schnitte mit Φ' (Ω) eine Coincidenzcurve 32. Ordnung.

44. Setzen wir uns ins Klare über die Lage der sechs Hauptflächen a'_i und der den zehn Ebenenpaaren von Σ entsprechenden Flächen F'_E zu Ω'. Nach § 1 entspricht jedem Ebenenpaare E von G eine allgemeine Fläche F'_E

von G'; da von den beiden Ebenen des Paares E die eine der anderen verbunden ist, korrespondiert F'_E schon einer der beiden Ebenen des Paares E allein. Eine Ebene von E schneidet $\Omega \infty \Omega$ ausser in den drei in ihr befindlichen Doppelgeraden $p_{i,k}$ noch in zwei einander unendlich benachbarten Geraden, die nicht als ganze einander verbunden sind. Ihnen entsprechen zwei auf F'_E und Ω' zugleich (einander unendlich nahe) verlaufende Curven achter Ordnung f', welche zusammen den vollen Schnitt 16. Ordnung von F'_E und Ω' ausmachen. Diese Berührungscurve f' hat zunächst dieselben Eigenschaften wie jede beliebige f', die einer Gerade von Σ entspricht, begegnet also jeder Gerade der beiden Regelscharen auf F'_E viermal. Sämtliche Geraden auf den zehn Flächen F'_E sind also vierfache Tangenten von Ω'. Jeder von ihnen entsprechen zwei einander verbundene ebene Curven vierter Ordnung in den beiden Ebenen des in Betracht kommenden Paares E, welche in den drei Grundpunkten A_i ihrer Ebenen Doppelpunkte besitzen und durch diejenige Fläche F^4 in E eingeschnitten werden, welche einer Trägerfläche $F^{4\prime}$ der entsprechenden Gerade korrespondiert. — Da die Doppelgerade des Ebenenpaares jeder der sechs in ihm liegenden Geraden $p_{i,k}$ einmal ausserhalb der Grundpunkte A_i begegnet, so liegen die entsprechenden sechs Punktepaare $P'_{i,k}$, $\overline{P}'_{i,k}$ auf der Berührungscurve, und zwar einfach. Berücksichtigen wir noch, dass jede Gerade $p_{i,k}$ vier Ebenenpaaren ihres Raumes angehört, so haben wir den Satz:

Jedem der zehn Ebenenpaare von G (G') entspricht eine allgemeine Fläche von G' (G), welche Ω' (Φ) längs einer Curve achter Ordnung der Art f' (f) berührt; sie enthält auf dieser Berührungscurve sechs Punktepaare $P'_{i,k}$, $\overline{P}'_{i,k}$ ($Q_{i,k}$, $\overline{Q}_{i,k}$). Umgekehrt gehen durch jedes Punktepaar $P'_{i,k}$, $\overline{P}'_{i,k}$ ($Q_{i,k}$, $\overline{Q}_{i,k}$) vier Flächen, welche Ebenenpaaren von Σ (Σ') entsprechen.

Einem Hauptpunkte A_i entspricht eine Fläche a'_i. Der Kegel a_i ist Anschmiegungskegel von Ω im Doppelpunkte A_i; auf jeder seiner Kanten, Doppelsecanten von r_s, ist

von den beiden Coincidenzpunkten der eine in A_i, der andere ihm unendlich benachbart auf der Kante gelegen. Solchen zwei einander unendlich benachbarten Coincidenzpunkten entsprechen nach dem Prinzipe der Stetigkeit zwei unendlich benachbarte Paare verbundener Punkte d. h. die der Kegelkante als Doppelsecante von r_3 entsprechende Grundcurve aus $(R', \bar{R}')$ auf a'_i berührt Ω' an zwei einander verbundenen Stellen. Dies gilt für alle Grundcurven von $(R', \bar{R}')$ auf a'_i, folglich werden die Berührungspunkte eine Curve auf a'_i bilden. Bestimmen wir ihre Ordnung, indem wir sie mit einer beliebigen Ebene α' schneiden. Die entsprechende Fläche φ' hat mit a_i eine Curve 16. Ordnung gemein, welche im Punkte A_i einen achtfachen, in den fünf übrigen A_k vierfache Punkte besitzt. Durch A_i gehen also acht Zweige der Schnittcurve; da diese Curve vollständig auf a_i verläuft, bestimmt auf jedem dieser Zweige der Nachbarpunkt von A_i eine Kante des Kegels a_i, auf der er liegt. Dies besagt aber, dass die Fläche φ achtmal zwei unendlich benachbarte Coincidenzpunkte des Kegels a_i enthält; diesen entsprechen auf der Schnittcurve der Ebene α' mit a'_i acht Punkte der gesuchten Berührungscurve, während die acht verbundenen Punkte auf der Schnittcurve von a'_i und $\varphi^{7'}$, der verbundenen Fläche von α', sich befinden. Die Berührungscurve von a'_i und Ω' ist also achter Ordnung. Mittels einer durch einen Punkt B'_i gelegten Ebene, deren Schnittpunkte mit dieser Curve ausserhalb B'_i man abzählt, ergiebt sich, dass die Punkte B'_i Doppelpunkte der Curve sind. Denken wir uns eine beliebige Gerade g' auf a'_i wieder als Schnitt von a'_i mit einer durch zwei Büschel eines beliebigen Netzes von G' erzeugten F'^4, so entspricht der g' der volle Schnitt der entsprechenden Fläche F^4 mit a_i; diese Curve achter Ordnung besitzt in A_i einen vierfachen Punkt, in den fünf übrigen Punkten A_k Doppelpunkte. Jeder ihrer vier Zweige durch A_i enthält zwei unendlich benachbarte Coincidenzpunkte; diesen entsprechen vier Berührungsstellen von g' mit Ω'. Alle Geraden auf den Flächen a'_i sind also vierfache

Tangenten von Ω'. Die Berührungscurve achter Ordnung jeder Fläche a'_i mit Ω' begegnet jeder Gerade von a'_i viermal. Auf der Berührungscurve von a'_i mit Ω' befinden sich die auf beiden Flächen zugleich gelegenen sechs Paare von Hauptpunkten II. Art einfach, so dass wir haben:

Von den 16 Paaren von Hauptpunkten II. Art in jedem Raume liegen je sechs immer auf einer Curve achter Ordnung, welche in den sechs festen Grundpunkten ihres Raumes Doppelpunkte hat.

Ferner haben wir erhalten:

Jede der zehn Hauptflächen a'_i (b_i) berührt Ω' (Φ) längs einer Curve achter Ordnung, welche die Grundpunkte B'_i (A_i) doppelt, die übrigen auf a_i (b_i) befindlichen sechs Hauptpunktepaare einfach enthält. Umgekehrt gehen, wie bekannt (§ 5), durch jedes Punktepaar $P'_{i,k}$, $\overline{P}'_{i,k}$ zwei Hauptflächen a'_i, durch das Paar R', $\overline{R}'$ sämtliche Flächen a'_i; analog in Σ'.

Sehen wir von den sechs vierfachen Punkten B'_i auf Ω' ab, so haben wir im Zusammenhange mit der Fläche Ω' folgende Konfiguration von Punkten und Flächen: 16 Paare verbundener Doppelpunkte und 16 Flächen zweiten Grades, welche Ω' längs einer Curve achter Ordnung berühren. Jede dieser Flächen enthält sechs Paare verbundener Doppelpunkte; durch jedes Paar verbundener Doppelpunkte gehen sechs der genannten Flächen. Insbesondere gehen durch das Paar R', $\overline{R}'$ nur die sechs Hauptflächen a'_i, durch jedes der übrigen 15 Punktepaare vier Flächen, die Ebenenpaaren von Σ entsprechen, und zwei Hauptflächen. Hieraus ergiebt sich zugleich auch die Verteilung der 16 Berührungscurven achter Ordnung auf Ω'.

Diese Figur ist ein Analogon zu der Kummerschen Konfiguration von 16 Doppelpunkten und 16 Doppeltangentialebenen auf der Kummerschen Fläche vierter Ordnung.

45. Jeder beliebige Kegel aus G schneidet Ω in einer Coincidenzcurve achter Ordnung, welche in der Spitze des Kegels einen Doppelpunkt besitzt; folglich hat die ent-

sprechende Schnittcurve 16. Ordnung der dem Kegel entsprechenden allgemeinen Fläche F′ von G′ mit Ω′ in den Punkten des entsprechenden Punktepaares Doppelpunkte. Also:

Den Kegeln jedes der beiden Gebüsche entsprechen in der Regel allgemeine Flächen des anderen Gebüsches, welche Ω′ bezw. Φ in zwei einander verbundenen Punkten berühren.

Fragen wir nach Coincidenzpunkten eines Raumes, denen wieder Coincidenzpunkte im anderen entsprechen, so erhalten wir ähnlich wie beim ebenen Probleme für diese Punkte die Bedingung, dass sie auf Ω und Φ bezw. auf Ω′ und Φ′ gleichzeitig liegen müssen, und zwar entspricht jedem Punkte, der auf Ω und Φ liegt, ein Punkt auf Ω′ und Φ′ d. h. die Schnittcurven 32. Ordnung dieser beiden Flächenpaare entsprechen einander. Sie enthalten sämtliche Coincidenzpunkte ihres Raumes, denen wieder Coincidenzpunkte des anderen entsprechen. In diesen Curven berühren Regelflächen von Doppelsecanten der r_3 bezw. s_3' die Φ bezw. Ω′.

Sehen wir von der begrifflichen Zweiteilung des Raumes in Σ und Σ′ ab und betrachten die Gebüsche G, G′ als in demselben Raume befindlich, so können wir nach Punkten $X \equiv Y'$ fragen, denen in $\mathfrak{T}_{1,1}$ und $\mathfrak{T}'_{1,1}$ derselbe Punkt $\overline{X} \equiv \overline{Y}'$ verbunden ist. $\overline{X}$ liegt auf der Doppelsecante aus $X \equiv Y'$ an r_3, $\overline{Y}'$ auf derjenigen aus demselben Punkte an s_3'; sollen $\overline{X}$ und $\overline{Y}'$ zusammenfallen, so müssen diese beiden Doppelsecanten identisch sein. Punkte $X \equiv Y'$ der gesuchten Art giebt es also nur auf den zehn gemeinsamen Doppelsecanten von r_3 und s_3' (R. Sturm, Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? Annali di Matematica Serie II, Vol. III, p. 28, 1869/70); auf jeder derselben befinden sich zwei Involutionen verbundener Punkte, die eine zu $\mathfrak{T}_{1,1}$, die andere zu $\mathfrak{T}'_{1,1}$ gehörig. Die Punktepaare, welchen beiden $\mathfrak{T}_{1,1}$ und $\mathfrak{T}'_{1,1}$ angehören, ergeben sich als gemeinsame Paare je zweier auf demselben Träger befindlichen Involutionen. Dass wir hiermit alle Punktepaare der gewünschten Art haben, lehrt die Konstruktion.

Es giebt zehn Paare verbundener Punkte, welche den mit $\mathfrak{T}_{2,2}$ *verbundenen Verwandtschaften* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *und* $\mathfrak{T}'_{1,1}$ *gemeinsam sind. Jedes solche Paar ist gemeinsames Paar der beiden Involutionen verbundener Punkte auf einer der zehn gemeinsamen Doppelsecanten von* r_3 *und* s_3'. *Diese zehn Doppelsecanten sind die einzigen Gebilde, welche in* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *und* $\mathfrak{T}'_{1,1}$ *zugleich sich selbst verbunden sind.*

Suchen wir Punkte, die mit einem ihrer in $\mathfrak{T}_{2,2}$ entsprechenden Punkte zusammenfallen ($X \equiv X'$), so benutzen wir den Satz, dass es, wenn zwei collineare Flächengebüsche n_1-ter und n_2-ter Ordnung vorliegen, $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ Punkte giebt, die zugleich Grundpunkte zweier entsprechenden Netze der beiden Gebüsche sind (L. Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, deutsch von M. Curtze, Berlin 1870, Nr. 134). In unserem Falle ist diese Anzahl also 32. Zu diesen Punkten gehören ersichtlich auch die zwölf Gebüschgrundpunkte A_i und B'_i, und zwar einfach, da jeder von ihnen aus dem jeweiligen anderen Gebüsche ein und nur ein Netz ausscheidet, dessen ein entsprechendes Netz in ihm einen Grundpunkt hat; sie sind aber nicht der Art $X \equiv X'$, da jeder von ihnen für die Netze seines Gebüsches ein fester, nicht ein veränderlicher Grundpunkt ist.

Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ *enthält 20 Punkte, die sich mit einem ihrer beiden entsprechenden Punkte vereinigen.*

Dieser Satz findet seine Bestätigung durch das Korrespondenzprinzip im Raume, welches $n + n_1 + m + m_1$ Coincidenzen verlangt, wenn zwischen den Räumen Σ, Σ' eine n-n_1-deutige Korrespondenz vorliegt, und den Geraden von Σ (Σ') Curven m-ter (m_1-ter) Ordnung in Σ' (Σ) entsprechen (R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 40); bei uns: $2 + 2 + 8 + 8 = 20$.

Lebenslauf.

Am 2. Juni 1884 wurde ich, Otto Wiesing, evangelischer Konfession, Sohn des kgl. Steuerrats Theodor Wiesing und seiner Frau Marie, geb. Moser, zu Schubin bei Bromberg (Posen) geboren. Durch Versetzungen meines Vaters zu häufigem Schulwechsel gezwungen, besuchte ich das Realprogymnasium zu Wolgast (Pommern), das kgl. Luisengymnasium zu Memel, das Lyceum zu Strassburg i. E., das jetzige Lessinggymnasium zu Frankfurt a. M., das Gymnasium zu Bremerhaven, schliesslich das kgl. Friedrichsgymnasium zu Breslau, von dem ich Ostern 1902 mit dem Zeugnis der Reife entlassen wurde.

Alsdann bezog ich die Universität Breslau, um mich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Professoren:

Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Hintze, Kneser, Landsberg, London, O. E. Meyer, Muther, E. R. Neumann, Pax, Rosanes, Sturm sowie der Herren Dr. Schaefer und Dr. Herz,

nahm während 6 Semestern an den Uebungen des mathematisch-physikalischen Seminars unter Leitung der Herren Professoren Kneser, Rosanes und Sturm teil und arbeitete drei Semester lang im physikalischen Laboratorium unter den Herren Professoren O. E. Meyer und Neumann. Während des Sommersemesters 1904 besuchte ich die Universität München und hörte die Herren Professoren: J. v. Müller, Roentgen, A. Voss, E. v. Weber, Zehnder sowie an der technischen Hochschule daselbst Herrn Professor A. v. Braunmühl.

Allen meinen hochverehrten Lehrern fühle ich mich zu tiefstem Danke verpflichtet, insbesondere Herrn Geheimrat Sturm, dem ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke.